

UNA FUNZIONE GERARCHICA PER LA MODELLAZIONE DEL COMPORAMENTO DEI TERRENI

Giuseppe Mortara
Università Mediterranea di Reggio Calabria
giuseppe.mortara@unirc.it

Sommario

Questa nota riporta la formulazione di una funzione gerarchica per la modellazione del comportamento dei geomateriali. La funzione è il risultato della combinazione di due equazioni: una definita nel piano deviatorico, dipendente dall'angolo di Lode, ed una definita nel generico piano meridiano, dipendente dal primo invariante delle tensioni e dal secondo invariante delle tensioni deviatoriche. La funzione è in grado di fornire una varietà di forme che rendono possibile il confronto con numerosi criteri proposti in letteratura. Il confronto con i dati sperimentali derivati da prove su argille, sabbie, rocce e calcestruzzi evidenzia una grande flessibilità della funzione proposta.

Introduzione

La modellazione elastoplastica del comportamento dei geomateriali richiede l'assunzione di una funzione plastica e di un potenziale plastico nello spazio degli sforzi. Esistono due approcci generali per definire queste funzioni: il primo riguarda la definizione di una singola funzione in termini di invarianti (Matsuoka e Nakai, 1974; Lade e Duncan, 1975, Lade, 1977; Kim e Lade, 1984; Mortara, 2008, 2009), il secondo è quello di combinare due equazioni distinte definite nei piani deviatorici e nei piani meridiani (Willam e Warnke, 1974; van Eekelen, 1980; Bardet, 1990; Bigoni e Piccolroaz, 2004; Georgiadis et al., 2004; Mortara, 2010). Questa nota segue il secondo approccio partendo dalla derivazione della funzione deviatorica che si ottiene dalla famiglia di funzioni derivate dai criteri di Matsuoka e Nakai (1974) e Lade e Duncan (1975). La funzione ottenuta, coincidente con quella proposta da Bardet (1990), viene poi modificata allo scopo di renderla più flessibile. La funzione sarà poi completata dalla definizione di una funzione meridiana.

La funzione deviatorica

L'equazione che consente di determinare la famiglia di funzioni deviatoriche è la seguente:

$$\rho^3 + c_2\rho^2 + c_0 = 0 \quad (1)$$

dove

$$0.5 \leq \rho = \frac{J}{J_c} \leq 1 \quad c_2 = \frac{1}{\cos 3\theta} \frac{\beta^3 + 1}{\beta^2 - 1} \quad c_0 = -\frac{1}{\cos 3\theta} \frac{\beta^3 + \beta^2}{\beta^2 - 1} \quad \beta = \frac{J_e}{J_c} \quad (2)$$

Nell'equazione (2), J_e e J_c sono i valori che l'invariante J assume rispettivamente in condizioni di estensione e compressione triassiale. Gli invarianti J e θ del tensore degli sforzi deviatorico $s_{ij} = \sigma'_{ij} - \sigma'_{kk} \delta_{ij} / 3$ sono definiti da:

$$J = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}} \quad \theta = \frac{1}{3} \arccos \sqrt{6} \frac{s_{ij} s_{jk} s_{ki}}{(s_{mn} s_{mn})^{3/2}} \quad (3)$$

La soluzione dell'equazione (1) fornisce la variazione della resistenza deviatorica normalizzata ρ in funzione dell'angolo di Lode θ :

$$\rho(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - \beta + 1}} \frac{m_1}{\cos\left(\frac{m_2\pi + \omega}{6}\right)} \quad \omega = \arccos\left[-1 + \frac{27}{2} \frac{\beta^2(1-\beta)^2}{(\beta^2 - \beta + 1)^3} \cos^2 3\theta\right] \quad (4)$$

dove

$$m_1 = \begin{cases} -1 & \text{per } -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \\ 1 & \text{per } \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi \end{cases} \quad m_2 = \begin{cases} 4 & \text{per } -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \\ 0 & \text{per } \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi \end{cases} \quad (5)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

L'equazione (4), sebbene posta in forma differente, fornisce esattamente la variazione $\rho(\theta)$ derivata da Bardet (1990). La funzione appena derivata può essere modificata allo scopo di incrementare la sua potenzialità nel piano deviatorico. A tale scopo, nell'equazione (4), invece di utilizzare un valore costante del rapporto di forma β , è possibile utilizzare una funzione dell'angolo di Lode. Allo scopo di ottenere ancora un'equazione isotropa nel piano deviatorico, è necessario scegliere una funzione trigonometrica con periodo $2\pi/3$. Una possibile funzione è la seguente:

$$\beta_\theta = \beta_c + (\beta_e - \beta_c) \left| \sin\left(\frac{3}{2}\theta\right) \right| \quad (6)$$

dove β_c e β_e sono parametri della funzione. Chiaramente, per $\beta_c = \beta_e$ si otterrà la funzione di Bardet (1990). La figura 1 evidenzia le differenti forme che è possibile ottenere per diversi valori di $\beta_e - \beta_c$.

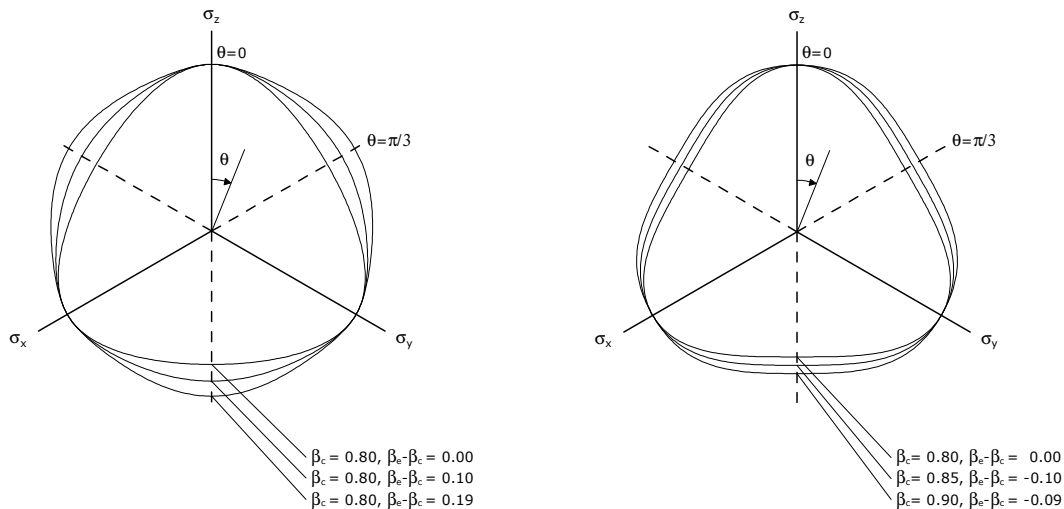


Figura 1. Forme della funzione deviatorica per diversi valori di $\beta_e - \beta_c$.

La funzione meridiana

La superficie in un generico piano meridiano ha la seguente espressione:

$$f_m = J - f_{m1} f_{m2} = 0 \quad f_{m1} = \alpha \left(\frac{I_t + I_1}{I_t + I_0} \right)^{n_1} \quad f_{m2} = \sqrt{1 - \left(\frac{I_t + I_1}{I_t + I_0} \right)^{n_2}} \quad (7)$$

dove I_1 è il primo invariante del tensore degli sforzi σ'_{ij} , mentre $I_t, I_0, \alpha, n_1, n_2$ sono parametri della funzione. In particolare, I_t, I_0 e α regolano la variazione della dimensione della superficie mentre n_1 ed n_2 ne regolano le variazioni di forma. La figura 2 riporta la forma delle generiche funzioni f_{m1} ed f_{m2} e quella fornita dal loro prodotto. Le funzioni sono diagrammate in un grafico normalizzato rispetto ai valori di I_0 e J_H , dove J_H rappresenta il valore di J per il quale la funzione f_m ha tangente orizzontale.

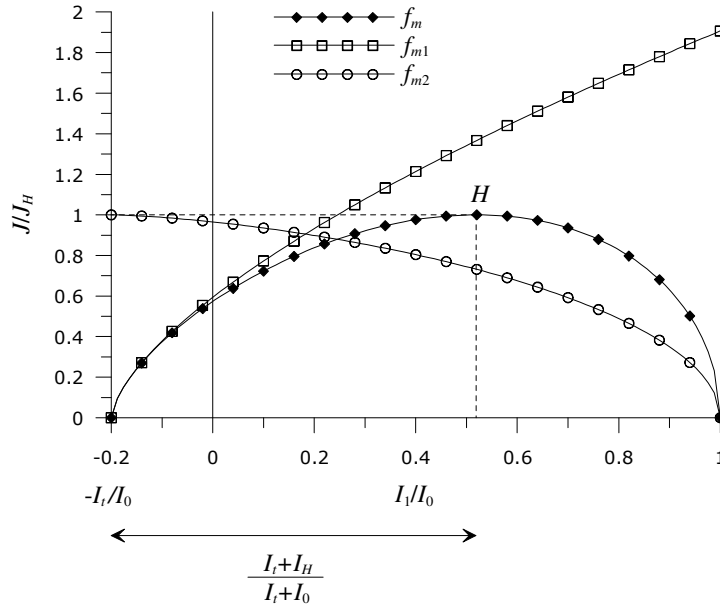


Figura 2. Funzione meridiana normalizzata.

La variazione dei parametri della funzione (7) rende la superficie risultante simile a diversi modelli proposti in letteratura (Nova e Wood, 1978; Nova, 1988; Lagioia et al., 1996; Aubertin e Li, 2004; Bier e Hartmann, 2006). Per $n_1 = 0.5$ e $n_2 = 1$ la superficie (7) è un'ellisse.

Espressione finale della funzione, determinazione dei parametri e confronto con i dati sperimentali

L'equazione (7) ha il problema di non essere definita per valori di I_1 esterni all'intervallo $[I_t, I_0]$. Per ovviare a tale inconveniente, la funzione viene riformulata come segue:

$$f(I_1, J, \theta) = J - k_1 k_2 f_{m1} f_{m2} \rho + f_1 + f_2 \quad (8)$$

dove:

$$\begin{aligned} f_{m1} &= \alpha \left(\frac{|I_t + I_1|}{I_t + I_0} \right)^{n_1} & f_{m2} &= \sqrt{\left| 1 - \left(\frac{|I_t + I_1|}{I_t + I_0} \right)^{n_2} \right|} \\ k_1 &= \text{sgn}\langle I_t + I_1 \rangle & k_2 &= \text{sgn}\langle I_0 - I_1 \rangle \\ f_1 &= (-I_t - I_1) \text{sgn}\langle -I_t - I_1 \rangle & f_2 &= (I_1 - I_0) \text{sgn}\langle I_1 - I_0 \rangle \end{aligned} \quad (9)$$

L'equazione (8) è definita per tutti gli stati tensionali possibili e fornisce sempre valori positivi al di fuori della superficie. La funzione proposta necessita 7 parametri per essere definita, 2 per la funzione deviatorica e 5 per la funzione meridiana. Sebbene il numero dei parametri possa sembrare elevato, la loro determinazione è semplice e si basa quasi esclusivamente su aspetti geometrici. Per quanto riguarda la funzione deviatorica, una volta assegnato sulla base dei dati sperimentali un valore per β_e , la determinazione di β_c può essere condotta determinando la resistenza normalizzata ρ_{30} dei dati per $\theta = 30^\circ$. Il parametro β_c risulta essere la radice

maggiore della seguente equazione:

$$d_2\beta_c^2 + d_1\beta_c + d_0 = 0 \quad (10)$$

dove:

$$\begin{aligned} d_2 &= \left(1 - \frac{1}{\rho_{30}^2}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ d_1 &= \left(1 - \frac{1}{\rho_{30}^2}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sqrt{2}\beta_e - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ d_0 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho_{30}^2}\right) \beta_e^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_e + 1 \end{aligned} \quad (11)$$

Per quanto riguarda invece la funzione meridiana, i parametri I_t e I_0 vengono determinati dall'analisi diretta dei dati sperimentali. I parametri α e n_1 sono invece determinati sulla base dell'ascissa normalizzata $R_H = (I_t + I_H)/(I_t + I_0)$ e del valore di J_H (figura 5):

$$\alpha = \frac{J_H}{R_H^{n_1} \sqrt{1 - R_H^{n_2}}} \quad n_1 = \frac{n_2}{2} \frac{R_H^{n_2}}{1 - R_H^{n_2}} \quad (12)$$

Il parametro n_2 viene infine determinato sulla base del minimo scarto con i dati sperimentali. Le figure che seguono mostrano alcuni confronti tra la funzione (8) ed alcune serie di dati sperimentali. La figura 3 mostra il confronto tra la funzione deviatorica e due serie di dati sperimentali determinati con l'apparecchiatura triassiale vera. Come si può notare, il confronto dei dati con le curve con β costante non sono soddisfacenti. Questo giustifica l'adozione di una funzione deviatorica modificata attraverso l'equazione (6). La figura 4 mostra invece il confronto tra dati sperimentali e la funzione (8) nel piano triassiale. Anche in questo caso si può osservare un ottimo accordo tra i dati sperimentali e la funzione proposta. L'ultimo confronto riguarda due serie di dati sperimentali determinati da prove biassiali su calcestruzzi aventi diverse resistenze a compressione monoassiale (Lee et al., 2004). La differenza di forma che si ottiene utilizzando una funzione deviatorica con rapporto di forma variabile emerge chiaramente nel piano biassiale. Come si può osservare, le curve con β costante non riescono ad interpretare adeguatamente i dati a rottura per alcuni stress-path, mentre le curve ottenute con un rapporto di forma variabile interpretano bene i dati per qualsiasi stress-path.

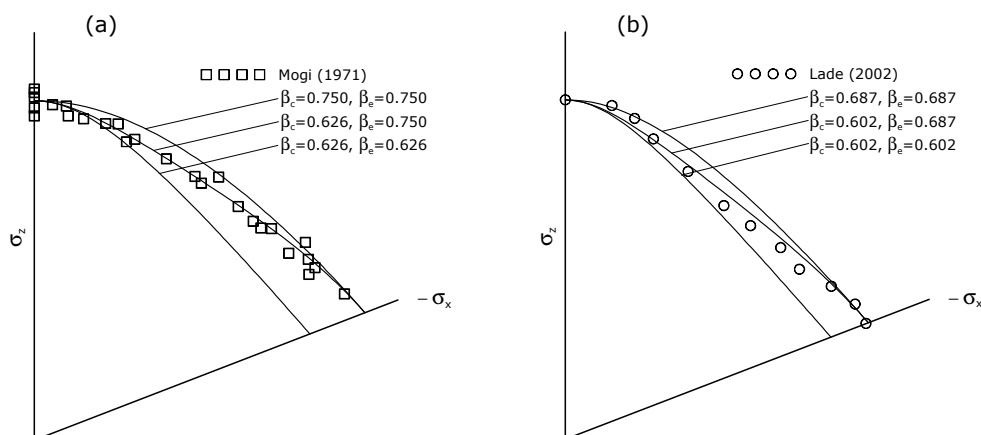


Figura 3. Confronto tra la funzione proposta e i dati sperimentali nel piano deviatorico. (a) Dati da Mogi (1971); (b) Dati da Lade (2002).

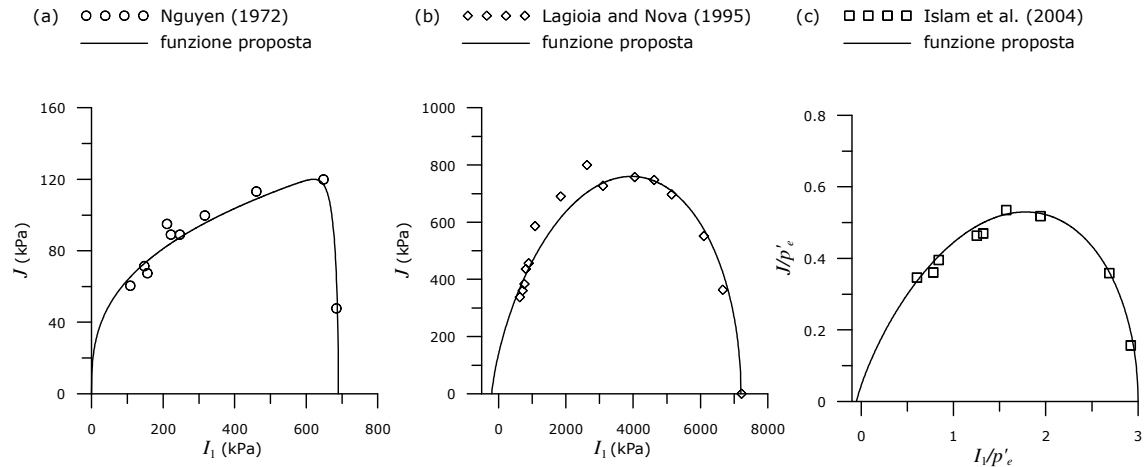


Figura 4. Confronto tra la funzione proposta e i dati sperimentali nel piano triassiale. (a) Dati da Nguyen (1972, vedere Aubertin e Li, 2004); (b) Dati da Lagioia e Nova (1995); (c) Dati da Islam et al. (2004).

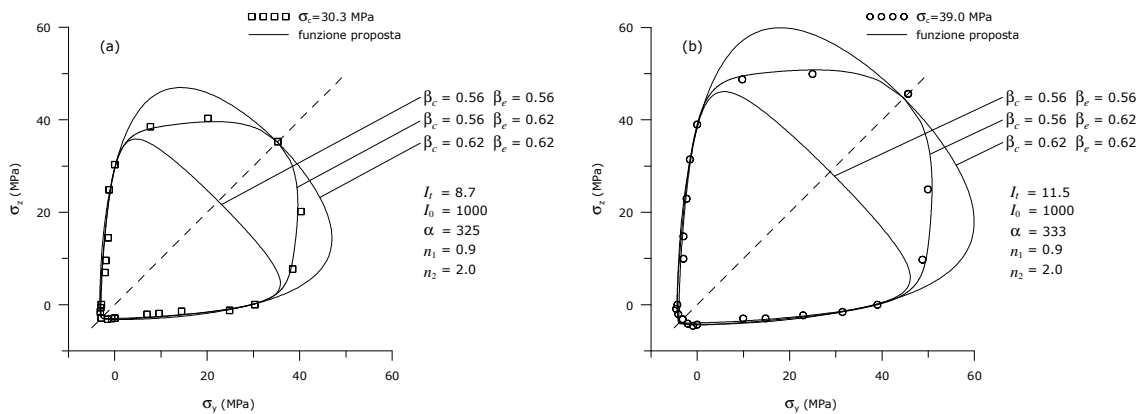


Figura 5. Confronto tra la funzione proposta e i dati sperimentali nel piano biassiale. Dati da Lee et al. (2004).

Conclusioni

La nota ha descritto la formulazione di una nuova funzione utile per la modellazione del comportamento dei terreni. La funzione è stata ottenuta dall'accoppiamento di una funzione deviatorica e di una funzione meridiana. La determinazione dei parametri è semplice e si basa su criteri geometrici. Il confronto con i dati sperimentali derivati da prove su argille, sabbie, rocce e calcestruzzi ha evidenziato una grande flessibilità della funzione proposta.

Bibliografia

- Aubertin M., Li L. (2004). A porosity-dependent inelastic criterion for engineering materials. *International Journal of Plasticity*, 20(12): 2179-2208.
- Bardet J.P. (1990). Lode dependences for isotropic pressure-sensitive materials. *ASME, Journal of Applied Mechanics*, 57(3): 498-506.
- Bier W., Hartmann S. (2006). A finite strain constitutive model for metal powder compaction using a unique and convex single surface yield function. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 25(6): 1009-1030.
- Bigoni D., Piccolroaz A. (2004). Yield criteria for quasibrittle and frictional materials. *International Journal of Solids and Structures*, 41(11-12): 2855-2878.

- Georgiadis K., Potts D.M., Zdravkovic L. (2004). Modelling the shear strength of soils in the general stress space. *Computers and Geotechnics*, 31(1): 357-364.
- Islam M.K., Carter J.P., Airey D.W. (2004). Comparison of the yield locus and stress-dilatancy function of some critical state constitutive models with experimental data for carbonate sand. *Journal of the Institution of Civil Engineers, India*, 84: 267-274.
- Kim M.K., Lade P.V. (1984). Modeling of rock strength in three dimensions. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*; 21(1): 21-33.
- Lade P.V., Duncan M. (1975). Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soil. *ASCE, Journal of the Geotechnical Engineering Division* 1975; 101(GT10): 1037-1053.
- Lagioia R., Puzrin A.M., Potts D.M. (1996). A new versatile expression for yield and plastic potential surfaces. *Computers and Geotechnics*, 19(3): 171-191.
- Lee S.K., Song Y.C., Han S.H. (2004). Biaxial behavior of plain concrete of nuclear containment building. *Nuclear Engineering and Design*, 227(2): 143-153.
- Matsuoka H., Nakai T. (1974). Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses. *Proceeding Japan Society of Civil Engineers*, 232: 59-70.
- Mortara G. (2008). A new yield and failure criterion for geomaterials. *Géotechnique*, 58(2): 125-132.
- Mortara G. (2009). A hierarchical single yield surface for frictional materials. *Computers and Geotechnics*, 36(6): 960-967.
- Mortara G. (2010). A yield criterion for isotropic and cross-anisotropic cohesive-frictional materials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 34(9): 953-977.
- Nova R., Wood D.M. (1978). An experimental program to define the yield function for sand. *Soils and Foundations*, 18(4): 77-86.
- Nova R. (1988). Sinfonietta classica: an example on classical soil modelling. *Constitutive Equations for Granular Non-Cohesive Soils, Saada and Bianchini (eds)*, Cleveland, Balkema, Rotterdam, 501-520.
- van Eekelen H.A.M. (1980) Isotropic yield surface in three dimensions for use in soil mechanics. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 4(1):89-101.
- Willam K., Warnke E.P. (1974). Constitutive model for the triaxial behavior of concrete. *Seminar on concrete structure subjected to triaxial stresses*, ISMES, Bergamo, Italy.