

## **PROPAGAZIONE ONDOSA IN MEZZI DISCONTINUI: METODI ANALITICI E NUMERICI**

Andrea Perino

*Dipartimento di ingegneria strutturale e geotecnica, Politecnico di Torino  
andrea.perino@polito.it*

Giovanni Barla

*Dipartimento di ingegneria strutturale e geotecnica, Politecnico di Torino  
giovanni.barla@polito.it*

### **Sommario**

Lo studio della propagazione ondosa negli ammassi rocciosi giuntati è di particolare interesse in molti problemi di geofisica, meccanica e dinamica delle rocce, nonché di ingegneria sismica. Questo articolo presenta un metodo analitico per studiare la propagazione ondosa attraverso gli ammassi rocciosi. Il metodo è basato sulla "matrice scattering", molto utilizzata nei problemi di propagazione di onde elettromagnetiche. La matrice scattering contiene al suo interno i coefficienti di riflessione e di trasmissione di un singolo giunto o di una famiglia di giunti. Il metodo consente di rappresentare giunti a comportamento elastico lineare, visco-elastico o con attrito e permette l'applicazione di onde P, SV o SH con qualsiasi angolo di incidenza. Questo approccio analitico, operante nel dominio delle frequenze, considera tutte le riflessioni multiple che si originano tra i giunti. I risultati analitici ottenuti, in presenza di una famiglia di giunti con attrito, sono confrontati con quelli derivanti dall'analisi DEM eseguita con il codice 3DEC.

### **Introduzione**

La definizione delle proprietà dinamiche degli ammassi rocciosi e la valutazione degli effetti dei giunti sulla propagazione ondosa sono fondamentali per comprendere il comportamento dinamico di un ammasso roccioso. La propagazione ondosa attraverso ammassi giuntati è stata studiata da numerosi autori attraverso l'elaborazione di metodi analitici, numerici e l'esecuzione di prove sperimentali.

Gli approcci analitici che possono essere utilizzati sono essenzialmente tre: il Thin Plane Layer Model (TPLM), il Displacement Discontinuity Model (DDM) e l'Equivalent Medium Model (EMM).

- Il TPLM fu proposto da Fehler (1982) e consente di rappresentare un giunto con riempimento come un sottile strato avente le proprietà meccaniche del materiale di riempimento. Le condizioni al contorno, che vengono imposte lungo le due interfacce che separano il giunto dalla roccia intatta, sono la continuità di tensioni e di spostamenti.
- Il DDM invece è stato applicato alla propagazione delle onde sismiche da Schoenberg (1980). A differenza del precedente, il giunto viene rappresentato come un'interfaccia di spessore trascurabile rispetto alla lunghezza d'onda incidente. Lungo il giunto vengono imposte la continuità delle tensioni e la discontinuità degli spostamenti. Myer (1990) e Pyrak-Nolte (1990) estesero il DDM ai giunti con riempimento aventi un comportamento visco-elastico utilizzando i modelli reologici di Kelvin-Voigt e di Maxwell. Miller (1978) utilizzò il DDM per valutare l'effetto di interfacce con attrito. Altre applicazioni di una certa importanza sono quelle di Cai e Zhao (2000), i quali utilizzarono il metodo delle curve caratteristiche per risolvere l'equazione dell'onda e quindi valutare l'effetto delle riflessioni multiple tra i giunti.

- L'EMM apporta una grossa semplificazione del problema andando a rappresentare il mezzo discontinuo come un mezzo continuo equivalente. Vengono quindi definiti i parametri elastici equivalenti a partire da quelli della roccia intatta e dei giunti. Numerosi contributi sono disponibili in letteratura circa la definizione dei moduli elastici equivalenti tra i quali uno degli ultimi è quello proposto da Li et al. (2010).

L'obiettivo di questo articolo è di presentare un metodo analitico in grado di valutare la propagazione ondosa attraverso gli ammassi giuntati. Il metodo sviluppato è lo Scattering Matrix Method (SMM) il quale è basato sulla definizione della matrice scattering (Aki e Richards, 2002) dell'interfaccia o del giunto. L'approccio della "matrice scattering" è molto utilizzato nell'analisi della propagazione delle onde elettromagnetiche (Collin, 1992) e per questo si è adottato il formalismo delle linee di trasmissione per sviluppare l'SMM.

Dopo una prima parte di descrizione del metodo si passerà alla sua validazione attraverso il confronto con il codice agli elementi distinti 3DEC (Itasca Consulting Group).

## Lo Scattering Matrix Method (SMM)

### Descrizione del metodo

Il fenomeno dello scattering ha origine quando un'onda elastica incontra una discontinuità e può essere convenientemente rappresentato dalla matrice scattering. In presenza di un'interfaccia piana fra due materiali di proprietà elastiche differenti o in presenza di un giunto in un ammasso roccioso le onde incidente, riflessa e trasmessa hanno lo stesso vettore d'onda trasversale. I corrispondenti coefficienti di riflessione e di trasmissione sono contenuti all'interno della matrice scattering:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} \quad (1)$$

dove  $\mathbf{S}_{ii}$  sono le sottomatrici contenenti i coefficienti di riflessione relativi ad un'onda incidente da destra e ad una incidente da sinistra, mentre le sottomatrici  $\mathbf{S}_{ij}$  contengono i corrispondenti coefficienti di trasmissione. Siccome le onde elastiche possono avere tre diverse polarizzazioni (P, SV e SH), le sottomatrici della matrice scattering hanno dimensione 3x3.

Per ogni giunto si può costruire una matrice scattering e quindi in presenza di una famiglia di giunti paralleli si ottengono tante matrici scattering quanti sono i giunti considerati. A questo punto, attraverso una serie di passaggi algebrici tra le matrici scattering ottenute, si può pervenire alla definizione della matrice scattering globale rappresentante l'intera famiglia di giunti. Con la matrice scattering globale si possono considerare tutte le riflessioni multiple che un'onda subisce quando incontra una famiglia di giunti.

### La matrice scattering

Con il formalismo delle linee di trasmissione è possibile analizzare il fenomeno della propagazione ondosa attraverso un mezzo stratificato. Chiamando  $z$  l'asse perpendicolare alla stratificazione, possiamo calcolare il campo elastico di velocità  $\mathbf{v}$  e di tensioni  $-\mathbf{T} \cdot \mathbf{z}$  sulla superficie normale a  $z$ .

Il campo elastico generato da un'onda piana incidente con un qualsiasi angolo può essere espresso come:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ -\mathbf{T} \cdot \mathbf{z} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \mathbf{c}^+ \\ \mathbf{c}^- \end{pmatrix} \quad (2)$$

dove  $\mathbf{v}$  è analoga a una corrente elettrica equivalente mentre  $-\mathbf{T} \cdot \mathbf{z}$  ad una tensione elettrica equivalente.

Le colonne della matrice modale  $\mathbf{M}$  (di dimensioni 6x6) contengono le componenti progressive e regressive delle onde SH, SV e P. Il vettore di stato (vedi Eq. (2)) contiene le componenti di velocità e di tensione nelle tre direzioni spaziali.

In presenza di un'interfaccia tra due mezzi di proprietà elastiche differenti possiamo imporre lungo l'interfaccia stessa la continuità delle tensioni e degli spostamenti:

$$\mathbf{M}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1^+ \\ \mathbf{c}_1^- \end{pmatrix} = \mathbf{M}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{c}_2^+ \\ \mathbf{c}_2^- \end{pmatrix} \quad (3)$$

da cui si può ottenere la matrice di trasmissione  $\mathbf{A}$  la quale mette in relazione le ampiezze delle onde ai due lati dell'interfaccia:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{M}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1^+ \\ \mathbf{c}_1^- \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_2^+ \\ \mathbf{c}_2^- \end{pmatrix} \quad (4)$$

Attraverso semplici passaggi algebrici è possibile determinare la matrice scattering  $\mathbf{S}$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_1^- \\ \mathbf{c}_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1^+ \\ \mathbf{c}_2^- \end{pmatrix} \quad (5)$$

dove  $\mathbf{c}_1^+$  e  $\mathbf{c}_2^-$  sono le ampiezze delle onde incidenti sulla discontinuità mentre  $\mathbf{c}_1^-$  e  $\mathbf{c}_2^+$  rappresentano le ampiezze delle onde scatterate (riflessa e trasmessa). A titolo di esempio, con l'ordine imposto nella definizione della matrice modale, l'elemento 2,3 della sottomatrice  $\mathbf{S}_{11}$  è il coefficiente di riflessione relativo ad un'onda SV per un'onda P incidente. Siccome le onde SH sono disaccoppiate dalle altre due polarizzazioni, è possibile decomporre la matrice scattering scritta nella forma generale, in una matrice 2x2 relativa alle onde SH ed in una matrice 4x4 relativa alle onde SV e P.

Nello SMM il giunto di un ammasso roccioso può essere tenuto in conto utilizzando il TPLM o il DDM a seconda del problema analizzato. Con il TPLM, in presenza di un giunto con riempimento, si determina la matrice di trasmissione globale del giunto a partire dalle matrici di trasmissione (Eq. 4) relative alle due interfacce roccia-giunto e giunto-roccia. Se invece si utilizza il DDM l'espressione della matrice di trasmissione varia perché cambiano le condizioni al contorno, visto che si impone una discontinuità di velocità lungo l'interfaccia. In questo caso si calcola l'ammettenza del giunto  $\mathbf{Y}$  e la matrice di trasmissione diventa:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}_1^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Y} \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{M}_2 \quad (6)$$

A questo punto possiamo determinare la matrice scattering del giunto a partire dalle matrici di trasmissione definite dalle Eq. (4) e (6) a seconda dell'approccio utilizzato.

A titolo di esempio, per un'onda SH incidente su di un giunto lineare elastico è possibile pervenire alle espressioni analitiche dei coefficienti di riflessione e di trasmissione ottenuti con il TPLM:

$$R_{SH}(\omega, \theta) = S_{11} = \frac{\left(\frac{1-F}{4F+4}\right)\phi}{\frac{1}{2}\phi + \left(\frac{1-F}{4F+4}\right)\phi} \quad T_{SH}(\omega, \theta) = S_{21} = \frac{1}{\frac{1}{2}\phi + \left(\frac{1-F}{4F+4}\right)\phi} \quad (7)$$

dove  $\phi = e^{jk_{zs} \cdot F \cdot h} - e^{-jk_{zs} \cdot F \cdot h}$ ,  $\phi = e^{jk_{zs} \cdot F \cdot h} + e^{-jk_{zs} \cdot F \cdot h}$ ,  $h$  è lo spessore del giunto,  $k_{zs} = k_s \cdot \cos(\theta)$  è la componente del vettore d'onda nella direzione di propagazione ( $k_s = \omega/V_s$ ) e  $F$  è il rapporto di impedenza tra il materiale di riempimento e la roccia.

Con il DDM è possibile ottenere le seguenti espressioni dei coefficienti di riflessione e di trasmissione per un giunto:

$$R_{SH}(\omega, \theta) = S_{11} = \frac{Z_s Y}{2 + Z_s Y} \quad T_{SH}(\omega, \theta) = S_{21} = \frac{2}{2 + Z_s Y} \quad (8)$$

dove  $Z_s (= \rho \cdot V_s \cdot \cos(\theta))$  è l'impedenza della roccia,  $\theta$  è l'angolo dell'onda incidente,  $Y$  è

l'ammettenza che dipende dalla frequenza dell'onda incidente e dalle proprietà del giunto. Utilizzando il DDM è possibile rappresentare giunti con comportamento lineare elastico, viscoelastico o con attrito. Tutto questo può essere ottenuto determinando per ogni modello di comportamento la relativa ammettenza  $Y$  che risulta funzione della frequenza dell'onda incidente, della rigidezza dinamica del giunto ( $Pa/m$ ) e della viscosità ( $Pa \cdot s/m$ ) del giunto. Perino & Barla (2011) hanno dimostrato che per un giunto con riempimento elastico il DDM, essendo una semplificazione del più realistico TPLM, può essere utilizzato indifferentemente rispetto al TPLM per un rapporto tra lo spessore del giunto  $h$  e la lunghezza d'onda  $\lambda_f$  nel materiale di riempimento inferiore a 0.1 (valutato per un  $F = 1/25$  caratteristico della maggior parte dei problemi reali di interesse ingegneristico).

### Confronto con il metodo agli elementi distinti (DEM)

In questo paragrafo, l'SMM sarà confrontato con un codice DEM (3DEC). Per poter effettuare il confronto fra i due metodi si è preso in considerazione il problema della propagazione monodimensionale di un'onda attraverso una colonna di roccia avente un numero variabile di giunti paralleli. In Figura 1 è raffigurato il modello 3D messo a punto in 3DEC per il caso di un singolo giunto. In queste analisi è stato trascurato lo smorzamento del materiale per poter studiare l'effetto dei giunti sulla propagazione ondosa. Il modello DEM è costituito da blocchi deformabili suddivisi a loro volta da una mesh di dimensioni tali da garantire una corretta propagazione ondosa. Sul lato sinistro del modello in Figura 1 è stata applicata un'onda di taglio normale al giunto costituita da un ciclo di sinusoidi avente ampiezza  $0.1MPa$  e frequenza  $50Hz$ . Lungo i bordi sinistro e destro sono stati applicati dei contorni assorbenti. I bordi superiore e inferiore, paralleli al piano  $yz$ , sono stati vincolati in direzione  $x$  mentre i piani paralleli al piano  $xy$  sono stati vincolati in direzione  $z$  per simulare la condizione di deformazioni piane.

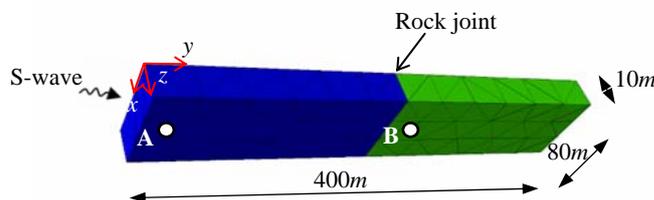


Figura 1. Modello 3DEC della colonna contenente un giunto in mezzeria

In corrispondenza dei punti A e B sono stati misurati rispettivamente l'onda incidente più quella riflessa e l'onda trasmessa. La roccia oggetto di studio presenta una densità di  $2650kg/m^3$ , un modulo di taglio di  $39GPa$ , una velocità di propagazione delle onde P di  $5830m/s$  e delle onde S di  $3840m/s$ .

In questo paragrafo si studia l'effetto di giunti con attrito sulla propagazione ondosa, mentre considerazioni analoghe sui giunti a comportamento elastico lineare sono riportate nei contributi di Perino & Barla (2011) e di Perino et al. (2010).

Il modello utilizzato in queste analisi è quello di Coulomb, nel quale dopo una prima fase elastica lineare segue, una volta raggiunta la resistenza a taglio del giunto  $\tau_s$ , la fase di scorrimento tra le due facce del giunto stesso. Il modello di Coulomb è stato introdotto nello SMM con una linearizzazione equivalente (Caughey, 1960). Sono state quindi definite una rigidezza e uno smorzamento equivalenti funzione delle caratteristiche del ciclo di isteresi che si origina durante la fase di scorrimento.

Utilizzando il modello in Figura 1 si è potuto analizzare l'effetto di un giunto con attrito sulla propagazione ondosa. Nelle Figure 2a-b vengono riportati gli andamenti delle onde misurate rispettivamente nei punti A e B ottenuti con SMM e con il codice 3DEC. Per il giunto si sono

assunti una rigidità normalizzata di taglio  $K_{ss}$  ( $= k_{ss}/\omega Z_S$ ) pari a 1.6 e un rapporto tra la massima ampiezza dell'onda incidente  $\tau_{imax}$  e la resistenza al taglio  $\tau_S$  ( $= 0.05MPa$ ) pari a 2. In Figura 2b si può in particolare vedere come l'onda trasmessa una volta raggiunto  $\tau_S$  rimane costante fino a che ritorna ad essere inferiore a  $\tau_S$ . Nel momento in cui avviene lo scorrimento parte dell'energia viene dissipata e quindi nasce un nuovo coefficiente, funzione di questa energia, chiamato coefficiente di assorbimento  $D$ . Il coefficiente  $D_1$ , relativo ad un giunto, è ottenuto a partire dall'equazione di conservazione dell'energia:

$$D_1 = \sqrt{\frac{E_D}{E_I}} = \sqrt{1 - R_1^2 - \left(\frac{Z_{S1}}{Z_{S2}}\right) T_1^2} \quad (9)$$

dove  $E_D$  ed  $E_I$  sono l'energia dissipata lungo il giunto e l'energia posseduta dall'onda incidente,  $Z_{S1}$  e  $Z_{S2}$  sono le impedenze della roccia a destra e a sinistra del giunto considerato (in questo caso  $Z_{S1} = Z_{S2}$ ).

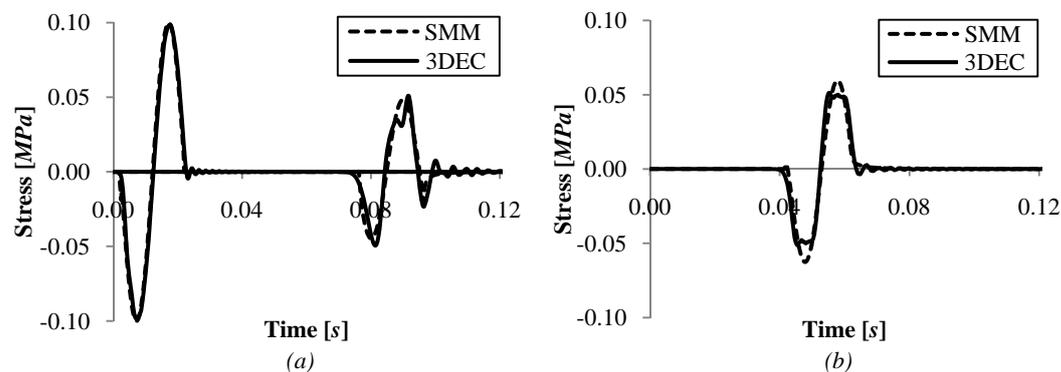


Figura 2. (a) Onde incidente e riflessa misurate nel punto A e (b) onda trasmessa misurata nel punto B ( $K_{ss}=1.6$  and  $\tau_{imax}/\tau_S=2$ )

L'andamento delle ampiezze dei coefficienti di trasmissione  $|T_N|$ , di riflessione  $|R_N|$  e di assorbimento  $|D_N|$  al variare del rapporto  $\tau_{imax}/\tau_S$  per un numero  $N$  di giunti è riportato nelle Figure 3a-c. Il calcolo è stato fatto per una rigidità normalizzata  $K_{ss}$  pari a 1.6 e una spaziatura tra i giunti normalizzata rispetto alla lunghezza d'onda pari a  $\zeta = 0.3$ . A questo punto si può affermare che il coefficiente  $|D_N|$  diventa diverso da zero non appena viene raggiunta la resistenza al taglio del giunto. L'energia dissipata (Figura 3c) aumenta rapidamente fino ad un massimo per poi diminuire lentamente fino e diventare indipendente dal rapporto  $\tau_{imax}/\tau_S$ .  $|T_N|$ , nel momento in cui è raggiunto  $\tau_S$ , diminuisce all'aumentare di  $\tau_{imax}/\tau_S$  mentre  $|R_N|$  aumenta all'aumentare di  $\tau_{imax}/\tau_S$  (Figura 3a-b). In campo elastico, all'aumentare del numero di giunti  $|T_N|$  diminuisce e di conseguenza  $|R_N|$  aumenta; invece quando si verifica lo scorrimento la dipendenza dei coefficienti dal numero  $N$  di giunti diventa sostanzialmente trascurabile.

## Conclusioni

Dai risultati ottenuti si evince che l'SMM consente di ottenere dei risultati che sono molto vicini a quelli ricavati con il codice DEM. L'SMM deve essere visto come un tentativo per comprendere meglio l'effetto dei giunti sulla propagazione ondosa in funzione del modello di comportamento adottato.

Lo scopo è stato quello di sviluppare un metodo analitico in grado di stimare il fenomeno della propagazione ondosa e di confrontarlo con i metodi DEM. Questo confronto permette di valutare l'efficacia e la correttezza delle condizioni al contorno e l'efficienza del reticolo di calcolo nello studio di modelli DEM di una certa complessità.

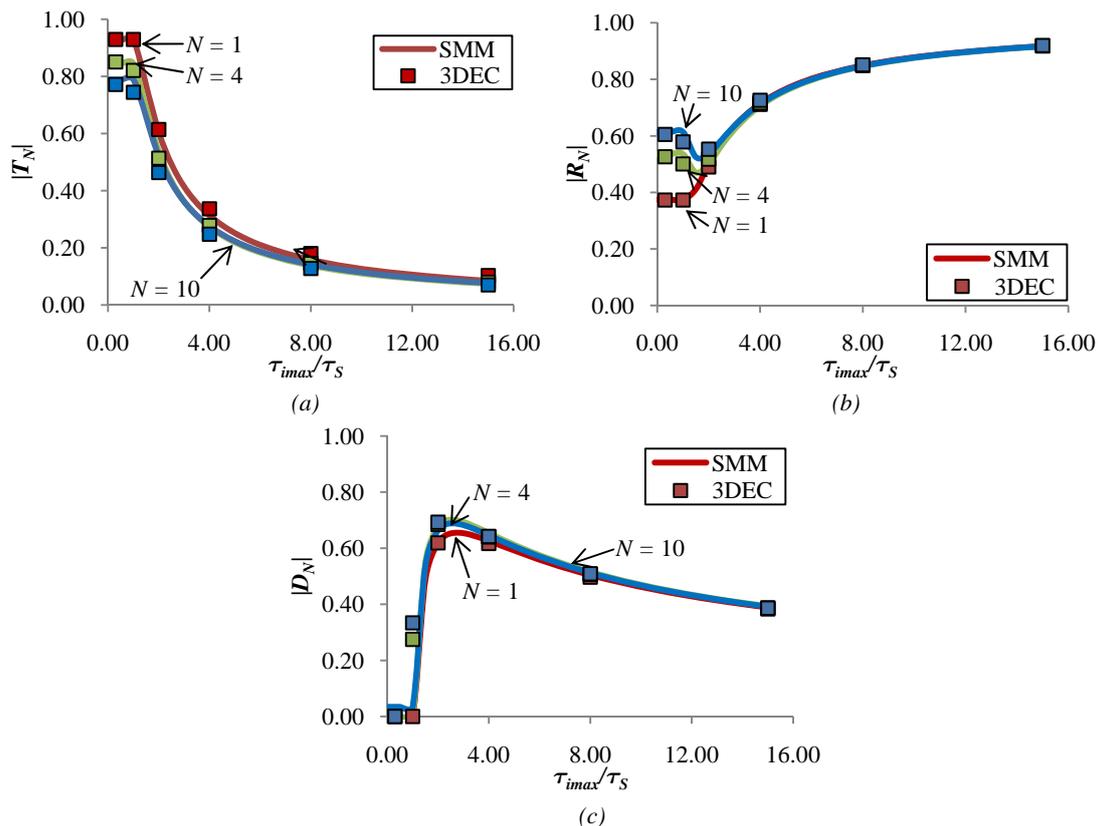


Figura 3. Ampiezza dei coefficienti di trasmissione (a), di riflessione (b) e di assorbimento (c) al variare del rapporto  $\tau_{imax}/\tau_S$  e del numero  $N$  di giunti ( $K_{ss} = 1.154$ ,  $\zeta = 0.3$ )

## Bibliografia

- Aki, K. & Richards, P.G. (2002). *Quantitative Seismology*. California: University Science Books, 2<sup>nd</sup> edition.
- Cai, J.G. & Zhao, J. (2000). *Effects of multiple parallel fractures on apparent attenuation of stress waves in rock masses*. In: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 37: 661-682.
- Collin, R. (1992). *Foundations for Microwave Engineering*. New York: Mc Graw Hill.
- Fehler, M. (1982). *Interaction of seismic waves with a viscous liquid layer*. *Bulletin of Seismic Association of America* 72: 55-72.
- Iizuka, K. (2008). *Engineering Optics*. Springer. 3rd edition.
- Li, J.C., Ma, G.W. & Zhao, J. (2010). *An equivalent viscoelastic model for rock mass with parallel joints*. *Journal of Geo-physical Research* 115.
- Miller, R.K. (1978). *The effects of boundary friction on the propagation of elastic waves*. *Bulletin of Seismic Association of America* 68: 987-98.
- Myer, L.R. & Pyrak-Nolte, L.J. & Cook, N.G.W. (1990). *Effects of single fractures on seismic wave propagation*. *Rock joints*: 467-473. Barton & Stephansson. Rotterdam: Balkema.
- Perino A. & Barla G. (2011). *Wave propagation in jointed rock masses by analytical and distinct element methods*. In: *13th International Conference of the International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics*, 09-11 maggio 2011, Melbourne (Australia).
- Perino, A., Zhu, J. B., Li, J. C., Barla, G. & Zhao, J. (2010). *Theoretical Methods for Wave Propagation across Jointed Rock Masses*. *Rock Mechanics and Rock Engineering* 43(N°6): 799-809.
- Pyrak-Nolte, L.J. & Myer, L.R. & Cook, N.G.W. (1990). *Transmission of seismic waves across single natural fractures*. *Journal of Geophysical Research* 95(B6): 8617-38.
- Schoenberg, M. (1980). *Elastic wave behaviour across linear slip interfaces*. *Journal of Acoustics Society of America* 68(5): 1516-21.
- Zhao, J. & Cai, J. G. 2001. *Transmission of elastic P-waves across single fractures with a nonlinear normal deformational behavior*. *Rock Mechanics and Rock Engineering* 34(1): 3-22.