

## UNA TECNICA DI CONDENSAZIONE PER L'ANALISI SISMICA 1D DI PENDII IN TERRA

Federico Pisanò  
Politecnico di Milano  
[pisano@stru.polimi.it](mailto:pisano@stru.polimi.it)

Claudio di Prisco  
Politecnico di Milano  
[cdiprisc@stru.polimi.it](mailto:cdiprisc@stru.polimi.it)

Manuel Pastor  
ETS de Ingenieros de Caminos, Madrid  
Centro de Estudios y Experimentación de Obras Públicas, Madrid  
[manuel.pastor@upm.es](mailto:manuel.pastor@upm.es)

### Sommario

In questa nota si analizza il ruolo di alcune ipotesi statico/cinematiche nell'analisi numerica 1D della risposta sismica dei pendii. In particolare, sono messi a confronto due approcci distinti, denominati *Simple Shear* e *1D Shear*: nel primo si studia la risposta del pendio nell'ipotesi di deformazione piana, tenendo in conto l'accoppiamento plastico deviatorico-volumetrico del materiale; nel secondo si trascurano per semplicità questi effetti, limitando l'analisi al caso di un problema di *puro taglio*. Evidenziate dapprima le differenze nel caso di sollecitazione sismica, i due approcci sono "riconciliati" introducendo una *tecnica di condensazione* per la definizione di modelli 1DS *SS-equivalenti*: in tal modo, è possibile garantire allo stesso tempo rapidità di calcolo e una descrizione il più possibile rigorosa della risposta del pendio. L'efficacia del metodo è esemplificata con riferimento a depositi normalconsolidati, costituiti da materiali a comportamento elasto-perfettamente (visco-) plastico.

### 1. Introduzione

L'impiego di modelli numerici monodimensionali (1D) per l'analisi sismica agli spostamenti dei pendii è sempre più frequente nel campo della Geotecnica Sismica, come compromesso tra l'eccessiva semplicità di metodi alla Newmark e l'onere computazionale – spesso notevole – di modelli 2D-3D per analisi dinamiche non-lineari. Infatti, approcci 1D basati sulla Meccanica del Continuo costituiscono di certo un miglioramento rispetto ai metodi classici quanto a descrizione dei processi dinamici (propagazione delle onde, non-linearità del materiale, ecc.), pur conservando sufficiente semplicità per applicazioni ingegneristiche di *routine*.

Un modello di pendio 1D fa implicitamente riferimento allo schema ideale di *pendio indefinito*, adatto per studiare l'insacco di meccanismi traslazionali poco profondi. Tuttavia, pur in quest'ambito molto ristretto, la formulazione di un modello analitico/numerico si presta a diverse scelte da parte dell'analista. Come si vedrà, si possono distinguere diverse classi di modelli 1D, differenti non solo in termini di modellazione del comportamento meccanico del terreno (modello costitutivo), ma anche di descrizione della statica e della cinematica del sistema (stato tenso-deformativo).

Proprio in tema di schemi statico/cinematici, in questa nota si confrontano due diversi approcci assai comuni, denominati nel seguito *Simple Shear* (SS) e *1D Shear* (1DS). Il

confronto mira a evidenziare le principali differenze tra le due formulazioni, le quali, pur nell'apparente somiglianza, possono condurre a risultati finali (stima degli spostamenti permanenti) sostanzialmente diversi. Tali differenze, tuttavia, possono esser ridotte sulla base di alcune considerazioni di natura teorica, e in particolare prestando attenzione alla calibrazione dei parametri costitutivi del terreno. Si riportano di seguito i punti salienti della trattazione; per dettagli ulteriori si rimanda a Pisanò (2011) e di Prisco *et al.* (2011).

## 2. Formulazione 1D del problema dinamico: gli approcci *Simple Shear* e *1D Shear*

In questo paragrafo il problema dinamico al contorno per il pendio indefinito in Fig. 1 è formulato secondo entrambi gli approcci SS e 1DS sopra menzionati. Il pendio, di spessore  $H$  e inclinazione  $\alpha$ , è sollecitato dal moto sismico imposto al substrato rigido sottostante (si assume nel seguito che tale moto sia dato dalla registrazione accelerometrica di Fig. 2). Il comportamento non-lineare/irreversibile del terreno è supposto di tipo elasto-perfettamente viscoplastico (Perzyna 1963), con luogo di rottura alla Mohr-Coulomb (MC).

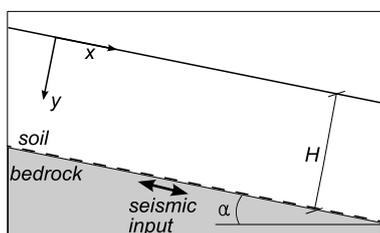


Fig. 1. Rappresentazione schematica del problema dinamico al contorno per il pendio indefinito

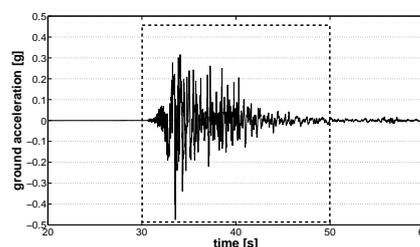


Fig. 2. Input sismico (terremoto de L'Aquila, 06-04-2009, stazione AQG, da <http://itaca.mi.ingv.it>)

In generale, il problema dinamico elasto-viscoplastico può esser formulato come un sistema iperbolico del prim'ordine (Mabssout & Pastor 2006):

$$\partial\boldsymbol{\varphi}/\partial t + \partial\mathbf{F}/\partial y = \mathbf{S} \quad (1)$$

in grado di modellare il trasporto avvertivo dell'incognita  $\boldsymbol{\varphi}$  indotto dal flusso  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi})$  in presenza della sorgente  $\mathbf{S}$ . Stante la struttura generale del sistema (1), le dimensioni e le componenti dei vettori  $\boldsymbol{\varphi}$ ,  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{S}$  dipendono dalle ipotesi statico/cinematiche introdotte per il pendio. Tali vettori sono specificati in Tab. 1 secondo gli approcci SS e 1DS.

SS	1DS
$\boldsymbol{\varphi} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \quad \sigma_z \quad v_x \quad v_y]^T$	$\boldsymbol{\varphi} = [\tau_{xy} \quad v_x]^T$
$\mathbf{F} = -[D_{12}v_y \quad D_{22}v_y \quad D_{33}v_x \quad D_{42}v_y \quad \tau_{xy}/\rho \quad \sigma_y/\rho]^T$	$\mathbf{F} = -[Gv_x \quad \tau_{xy}/\rho]^T$
$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -D_{11}^{\text{el}}\dot{\epsilon}_x^{\text{vp}} - D_{12}^{\text{el}}\dot{\epsilon}_y^{\text{vp}} - D_{14}^{\text{el}}\dot{\epsilon}_z^{\text{vp}} \\ -D_{21}^{\text{el}}\dot{\epsilon}_x^{\text{vp}} - D_{22}^{\text{el}}\dot{\epsilon}_y^{\text{vp}} - D_{24}^{\text{el}}\dot{\epsilon}_z^{\text{vp}} \\ -D_{33}^{\text{el}}\dot{\gamma}_{xy}^{\text{vp}} \\ -D_{41}^{\text{el}}\dot{\epsilon}_x^{\text{vp}} - D_{42}^{\text{el}}\dot{\epsilon}_y^{\text{vp}} - D_{44}^{\text{el}}\dot{\epsilon}_z^{\text{vp}} \\ b_x/\rho \\ b_y/\rho \end{bmatrix}$	$\mathbf{S} = [-G\dot{\gamma}_{xy}^{\text{vp}} \quad b_x/\rho]^T$
$\dot{\epsilon}^{\text{vp}} = \eta \left\langle \frac{f}{ p } \right\rangle^m \frac{\partial g / \partial \boldsymbol{\sigma}}{ \partial g / \partial \tau_{xy} }$	$\dot{\gamma}_{xy}^{\text{vp}} = \eta \left\langle \frac{f}{ \sigma_y } \right\rangle^m \text{sign}(\tau_{xy})$
$f = \left( \cos \theta - \frac{\sin \theta \sin \phi'}{\sqrt{3}} \right) \sqrt{J_2} + p$	$f =  \tau_{xy}  + \sigma_y \tan \phi$

Tab. 1. Specificazione dei termini in Eq. (1) secondo gli approcci SS e 1DS

Secondo l'approccio SS, il problema 1D è ottenuto riducendo il problema generale 3D sulla base di semplici argomenti di simmetria. In tal modo, si giunge ad un particolare problema *plane strain*, in cui ogni punto del pendio è caratterizzato dallo stato tenso-deformativo – fortemente iperstatico ( $\varepsilon_x = \varepsilon_z = 0$ ) – indotto da una prova di *taglio semplice ideale*: si hanno cioè due componenti di velocità e deformazione (totale) non nulle, con quattro componenti di sforzo (di cui due,  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$ , determinate dai vincoli di deformazione laterale impedita). Il *rate* di deformazione viscoplastica  $\dot{\varepsilon}^{vp}$  (quattro componenti) è dato da un legge di flusso alla Perzyna, in cui si introduce una scrittura 3D della funzione di snervamento  $f$  in termini di invarianti tensionali ( $p$ ,  $J_2$  e  $\theta$ ); allo stesso modo si ottiene il potenziale plastico  $g$ , sostituendo l'angolo d'attrito  $\phi'$  con quello di dilatanza  $\psi$ . La viscosità del materiale è governata dal parametro  $\eta$ , al cui graduale aumento si tende al limite di materiale elasto-plastico in senso classico (cioè *rate-independent*).

Diversamente, l'approccio 1DS si limita a descrivere il problema di *puro taglio* trascurando l'influenza del comportamento volumetrico del materiale, come d'uso nei recenti modelli di tipo *stick-slip* (Rathje & Bray 2000) e, in genere, nelle analisi di risposta sismica locale. In tal modo, si considerano solo le componenti tangenziali di sforzo e deformazione ( $\tau_{xy}$  e  $\gamma_{xy}$ ); il luogo di plasticità assume una forma 1D semplificata in termini di sforzo di taglio e sforzo normale (quest'ultimo staticamente determinato), mentre non si richiede il valore della dilatanza.

Evidentemente, un approccio di tipo 1DS consente di ridurre drasticamente il numero di incognite del problema e, quindi, il tempo di calcolo per le analisi numeriche. Tuttavia, sembra lecito domandarsi: *a parità di parametri comuni, i due diversi schemi di pendio forniscono risultati confrontabili oppure no?*

### 3. Alcuni aspetti della risposta elastoplastica in condizioni *Simple Shear*

Per rispondere alla domanda appena posta è utile introdurre alcuni concetti circa la risposta a taglio SS di un materiale elasto-perfettamente plastico (di Prisco & Pisanò 2011).

A questo scopo si supponga di “estrarre” da un pendio vergine (normalconsolidato) un elemento di terreno e di sottoporlo ad un percorso di carico SS a  $\sigma_y$  costante, partendo dallo stato tensionale *in situ* ( $\alpha = 10^\circ$ ). In Fig. 3 si riportano i risultati simulati per due diverse coppie  $\phi' - \psi$  in termini di curve  $\phi_{mob} - \gamma_{xy}$ , essendo  $\phi_{mob} = \arctan(\tau_{xy}/\sigma_y)$ . Le due curve in Fig. 3 conducono a tre principali conclusioni: (i) se l'inclinazione del pendio è sufficiente piccola (minore di un valore  $\alpha_y$ ), le curve  $\phi_{mob} - \gamma_{xy}$  presentano un iniziale tratto elastico pre-snervamento (indipendente da  $\psi$ ); (ii) nonostante il materiale sia perfettamente plastico, si osserva una risposta *pseudo-hardening*, dovuta all'iperstaticità del sistema; (iii)  $\phi_{mob}$  tende ad un valore limite  $\alpha_{lim}$ , tale che  $\alpha_{lim} < \phi'$  se  $\psi < \phi'$  (flusso plastico non-associato). Nel presente caso di modello elasto-plastico MC si può dimostrare che:

$$\alpha_y = \tan^{-1} \left\{ \sqrt{[4\nu(1-\nu) - \cos^2 \phi'] / 2(1-\nu)} \right\}; \quad \alpha_{lim} = \tan^{-1} [(\cos \psi \sin \phi') / (1 - \sin \phi' \sin \psi)] \quad (2)$$

e che il raggiungimento dell'obliquità  $\alpha_{lim}$  innesci un meccanismo di *localizzazione delle deformazioni* lungo un piano normale all'asse  $y$  di Fig. 1 (Borré & Maier 1989).

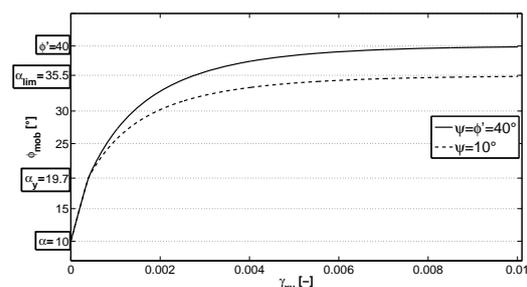


Fig. 3. Risposta elasto-plastica SS simulata per  $\psi = 40^\circ$  e  $\psi = 0^\circ$  (con  $\phi' = 40^\circ$ )

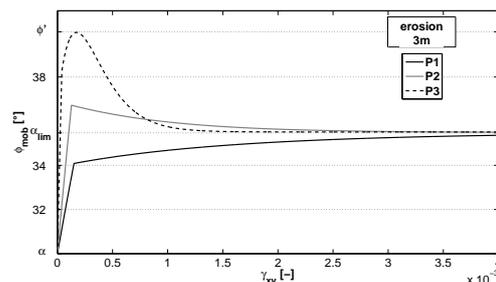


Fig. 4. Risposta SS di punti a profondità diverse di un pendio sovraconsolidato (erosione 3 m)

Lo scenario fin qui delineato diviene più complesso nel caso di pendii sovraconsolidati. Da un punto di vista modellistico, il processo di scarico ha il principale effetto di modificare lo stato tensionale *in situ* e, in particolare, la distribuzione spaziale del rapporto  $k_0 = \sigma_x / \sigma_y$  (purché  $\alpha > \alpha_y$ ). Si potrebbe mostrare come, per un materiale MC, il valore iniziale di  $k_0$  influenzi l'evoluzione del suddetto ramo *pseudo-hardening* (Fig. 3), che può divenire *pseudo-softening* o anche *pseudo-hardening/softening* per percorsi SS imposti su punti materiali via via più superficiali (Fig. 4).

L'ipotesi di non-associatività, insieme all'iperstaticità del sistema, risulta qui fondamentale: in sua assenza si otterrebbero solo risposte di tipo *pseudo-hardening* (di Prisco & Pisano 2011).

#### 4. Un approccio per definire modelli 1DS SS-equivalenti

I concetti appena introdotti consentono di apprezzare su base teorica la differenza tra gli schemi SS e 1DS. E' evidente, infatti, che, anche in caso di pendii vergini, un modello 1DS perfettamente plastico non potrà riprodurre la risposta locale del terreno in condizioni SS, con attese differenze nei risultati delle analisi dinamiche (vedi paragrafo successivo).

Qui di seguito si mostra come sia possibile, a costo di lievi modifiche, definire un modello 1DS SS-equivalente, in grado di riprodurre la risposta SS elasto-perfettamente plastica nel caso di pendii normalconsolidati. A tale scopo è sufficiente introdurre una legge di evoluzione per l'angolo d'attrito 1DS  $\phi$  in funzione delle deformazioni plastiche:

$$\tan \phi = \tan \phi_l + (\tan \phi_y - \tan \phi_l) e^{-h\kappa}, \quad \kappa(t) = \int_0^t |\dot{\gamma}_{xy}^{vp}(t')| dt' \quad (3)$$

in cui, sulla base delle (2):

$$(i) \phi_y = \max\{\alpha; \alpha_y\}; \quad (ii) \phi_l = \alpha_{lim}; \quad (iii) h = h_{ref} y_{ref} / y \quad (4)$$

Il parametro di incrudimento  $h$  può esser calibrato per riprodurre lo pseudo-incrudimento SS (Fig. 3), che, come si potrebbe mostrare, dipende dal confinamento (e quindi dalla coordinata  $y$ ): per meglio cogliere quest'aspetto si propone la calibrazione di un solo  $h_{ref}$  per  $y = y_{ref}$ , da estrapolarsi poi ad altre  $y$  secondo la terza delle (4). (di Prisco *et al.* 2010).

In sostanza, la (3) definisce un modello 1DS incrudente (nel seguito 1DS<sub>h</sub>), in cui lo *strain-hardening* serve a *condensare* in parametri costitutivi semplici gli effetti che, in un approccio SS, si devono alla coesistenza di iperstaticità strutturale e non-associatività elasto-plastica.

L'introduzione di modelli 1DS SS-equivalenti può risultare particolarmente utile da un punto di vista applicativo, riducendo l'onere computazionale delle analisi dinamiche senza trascurare effetti meccanici legati ad una modellazione più "consistente" del problema dinamico.

#### 5. Validazione numerica

La necessità e l'efficacia delle *procedura di condensazione* sono suffragate dai risultati di alcune analisi numeriche, eseguite sollecitando il pendio mediante l'input sismico

rappresentato in Fig. 2. Tali risultati consentono il confronto tra le prestazioni di (i) un modello SS perfettamente viscoplastico non-associato, (ii) un modello 1DS perfettamente viscoplastico e (iii) un modello 1DSH derivato da quello SS secondo le (3)-(4). In Tab. 2 sono riportati i parametri costitutivi impiegati; val la pena osservare che il valore  $\eta = 20 \text{ s}^{-1}$  è rappresentativo di un materiale elasto-viscoplastico “quasi” *rate-independent*. Tutti i risultati sono stati ottenuti risolvendo il problema differenziale (1) mediante un metodo FEM Taylor-Galerkin adatto a trattare materiali a bassa viscosità (Pastor & Mabssout 2006, di Prisco *et al.* 2011).

In primo luogo sono stati considerati due pendii normalconsolidati di spessore  $H = 5 \text{ m}$  e inclinazioni  $\alpha = 30^\circ$  (Fig. 5a-b) e  $\alpha = 10^\circ$  (Fig. 5c-d). I risultati sono rappresentati in termine di spostamento irreversibile  $U_x^{irr}$  ( $y=0, t$ ) e di profilo finale delle deformazioni tangenziali viscoplastiche  $\gamma_{xy}^{vp}$ .

SS		1DS		1DSH		
<b>ELASTICI</b>						
$E$ [MPa]	$\nu$ [-]	$G$ [MPa]		$G$ [MPa]		
117	0.3	45		45		
<b>PLASTICI</b>						
$\phi'$ [°]	$\psi$ [°]	$\phi$ [°]	$\phi_v$ [°]	$\phi_t$ [°]	$h_{ref}$ [-]	$y_{ref}$ [m]
40	10	40	19.7, 30	35.5	730	5
<b>VISCOSI</b>						
$\eta$ [s <sup>-1</sup> ]	$m$ [-]	$\eta$ [s <sup>-1</sup> ]	$m$ [-]	$\eta$ [s <sup>-1</sup> ]	$m$ [-]	
20	1	20	1	20	1	

Tab. 2. Parametri costitutivi per le analisi SS, 1DS e 1DSH

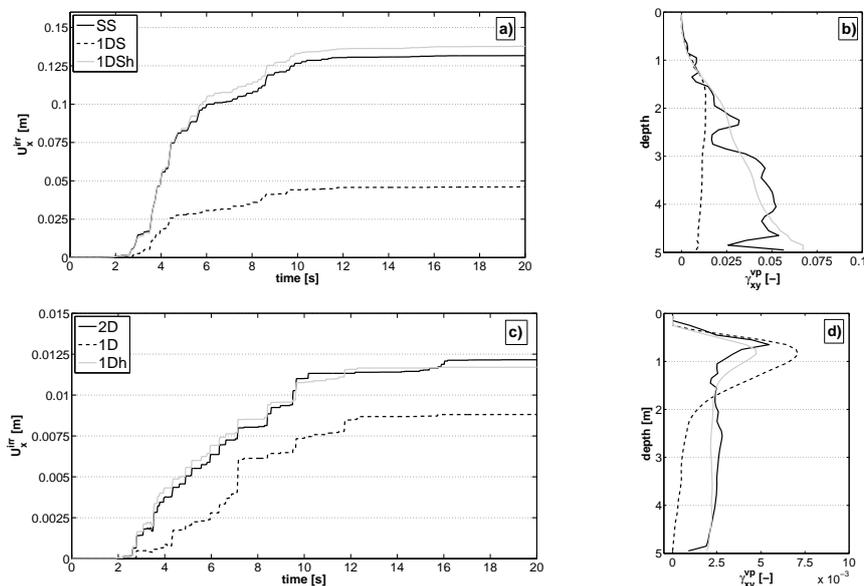


Fig. 5. Confronto tra risultati SS, 1DS e 1DSH per  $\alpha=30^\circ$  e  $H=5 \text{ m}$  (a-b),  $\alpha=10^\circ$  e  $H=5 \text{ m}$  (c-d)

Risalta innanzitutto la differenza quantitativa tra i risultati SS e 1DS; al contrario, il modello 1DSH approssima assai bene le predizioni SS dello spostamento in superficie e, “in media”, anche i profili spaziali di  $\gamma_{xy}^{vp}$ : non è lecito, del resto, attendersi un accordo perfetto, essendo lo *strain-hardening* (3) solo un’ approssimazione dell’incrudimento strutturale – per certi versi imprevedibile – che si ottiene nel caso SS.

L’efficacia della tecnica di condensazione è ulteriormente confermata per valori differenti dei parametri sia geometrici (Fig. 6,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $H = 10 \text{ m}$ ) che costitutivi (Fig. 7,  $\alpha = 30^\circ$ ,

$H = 5 \text{ m}$ ,  $\eta = 0.02 \text{ s}^{-1}$ ). In particolare, si noti come i risultati forniti dal modello 1DSh siano soddisfacenti anche per materiali altamente viscosi (basso  $\eta$ ), nonostante la sua calibrazione si fondi su delle relazioni analitiche ottenute in regime elasto-plastico (non viscoso).

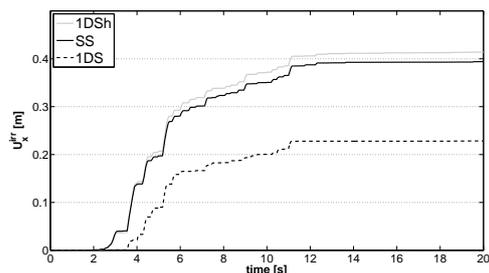


Fig. 6. Risultati SS, 1DS, 1DSh ( $\alpha=30^\circ$ ,  $H=10 \text{ m}$ )

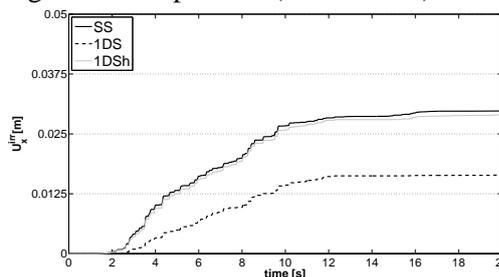


Fig. 7. Risultati SS, 1DS, 1DSh ( $\alpha=30^\circ$ ,  $H=5 \text{ m}$ ,  $\eta=0.02 \text{ s}^{-1}$ )

## 6. Conclusioni

La presente nota ha messo in luce le sostanziali differenze che intercorrono tra gli approcci SS e 1DS nella modellazione 1D di problemi dinamici di stabilità dei pendii. Tali differenze sono dovute principalmente all'accoppiamento plastico deviatorico-volumetrico che, nel caso SS, introduce – complice l'iperstaticità del sistema – (i) una dipendenza dell'obliquità limite locale dalla dilatanza e (ii) un comportamento pseudo-incrudente anche per materiali perfettamente elasto-plastici. Al contrario, l'approccio 1DS, concentrandosi sul solo problema di puro taglio, non coglie questi aspetti e fornisce risultati in molti casi del tutto dissimili. Se ne deduce una certa difficoltà per l'utilizzatore finale, spesso inconsapevole dell'impatto quantitativo di una scelta di modellazione solo apparentemente secondaria.

La nota ha però soprattutto evidenziato su base teorica la possibilità di riconciliare i due approcci definendo dei modelli 1DS *SS-equivalenti*, tali cioè da approssimare la risposta di un modello SS con ben minore onere computazionale. A questo risultato si perviene arricchendo il modello 1DS mediante apposite leggi di incrudimento, in cui condensare suddetti effetti strutturali. L'efficacia di tale tecnica è stata numericamente provata nel caso di pendii vergini e per materiali alla Mohr-Coulomb: colpisce in particolare il fatto che, benché sviluppata in condizioni di carico statico/monotono, la procedura di condensazione fornisca i risultati sperati per sollecitazioni cicliche arbitrarie (quali quelle sismo-indotte). Tuttavia, la validità del metodo è ad ora limitata al caso di pendii normalconsolidati. Si è fatto cenno, infatti, all'eventualità che, in presenza di materiali precaricati, la risposta SS locale possa divenire marcatamente fragile, dando così origine in problemi dinamici a fenomeni di localizzazione (*shear banding*). Per cogliere quest'aspetto la procedura di condensazione dovrebbe essere estesa a considerare anche l'effetto della storia di carico pregressa.

## Bibliografia

- Borré, G., Maier, G. (1989). On linear versus non-linear flow rules in strain localization analysis. *Meccanica*, 24: 36–41.
- di Prisco, C., Pisanò, F. (2011). An exercise on slope stability and perfect elastoplasticity. *Géotechnique* (in stampa).
- di Prisco, C., Pastor, M., Pisanò, F. (2010). Shear wave propagation along infinite slopes: a theoretically based numerical study. *Int. J. Anal. Num. Meth. Geomech.*, DOI: 10.1002/nag.1020.
- Mabssout, M., Pastor, M. (2006). A Runge-Kutta, Taylor-Galerkin scheme for hyperbolic systems with source terms. Application to shock wave propagation in viscoplastic geomaterials. *Int. J. Anal. Num. Meth. Geomech.*, 30: 1337–1355.
- Perzyna, P. (1963). The constitutive equations for rate sensitive plastic materials. *Quart. Appl. Math.*, 20: 321–332.
- Pisanò, F. (2011). Seismic performance of infinite slopes: numerical modelling, constitutive issues and theoretical considerations. Tesi di Dottorato, Politecnico di Milano.
- Rathje, E.M., Bray, J.D. (2000). Nonlinear coupled seismic sliding analysis of earth structures. *ASCE J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, 126(11): 1002–1014.