

LA TRAVE DI FONDAZIONE SU SUOLO ELASTICO STRATIFICATO DI SPESSORE LIMITATO CON MODULO ELASTICO VARIABILE CON LA PROFONDITÀ

Giovanni Dalerci, Rossella Bovolenta

*Università degli Studi di Genova – Dipartimento di Ingegneria delle Costruzioni
dell'Ambiente e del Territorio*

e-mail: Dalerci@diseg.unige.it Bovolenta@dicat.unige.it

Sommario

Nel presente lavoro, viene proposto un modello semiempirico per l'analisi dell'interazione tra una trave di fondazione ed un terreno stratificato di spessore limitato avente modulo elastico di Young variabile linearmente con la profondità.

Introduzione

Lo studio della trave su appoggio elastico continuo consiste nella soluzione del sistema formato dall'equazione della linea elastica della trave inflessa e dall'equazione costitutiva che definisce il legame tra la reazione del terreno ed il cedimento. Considerando la trave elastica di lunghezza L e larghezza B , è possibile scrivere l'equazione della linea elastica (1), dove $q(x)$ è il carico effettivo applicato alla trave, $w(x)$ è lo spostamento verticale dell'elemento strutturale, mentre $r(x)$ è la reazione dell'appoggio elastico continuo (integrale della funzione della pressione di contatto $p(x)$).

$$E J w^{IV}(x) = q(x) - r(x) = q(x) - \int_{-B/2}^{B/2} p(x, y) dy \quad (1)$$

La scelta dell'equazione costitutiva ha un'importanza determinante in relazione alla possibilità di analisi del modello con i mezzi (analitici, numerici, analogici) propri dell'ingegneria. Il successo del semplice modello di Winkler è stato determinato dalla possibilità di ottenere una soluzione analitica, mentre l'ipotesi di semispazio elastico omogeneo ed isotropo ha avuto diffusione per via del significato fisico dei parametri che caratterizzano il modello anche se è necessario ricorrere ad una soluzione numerica.

Nell'ipotesi di Boussinesq, supponendo che la distribuzione delle pressioni di contatto sia uniforme in direzione trasversale, l'equazione costitutiva è data dalla (2), ove E_t e ν_t sono rispettivamente il modulo elastico di Young ed il rapporto di Poisson del terreno:

$$w(x, y) = \frac{1-\nu_t^2}{\pi E_t} \int_0^L 2 p(x') \ln \left(\sqrt{\left(1 + \frac{B^2}{4(x-x')^2}\right)} + \left(\frac{B}{2|x-x'|}\right) \right) dx' \quad (2)$$

Il sistema formato dalle relazioni (1) e (2), fornisce la soluzione del problema che può essere ottenuta numericamente col metodo alle differenze finite centrate assumendo come incognite gli n valori medi delle pressioni di contatto p_i (con $i=1 \div n$) in corrispondenza di ogni elemento e gli $n+1$ valori del cedimento w_j (con $j=1 \div n+1$) agli estremi di ogni concio (Dalerci, 1991). Il valore del cedimento in mezzera di ogni elemento di lunghezza L/n viene espresso come il valor medio di quelli agli estremi.

L'equazione costitutiva (2) in termini finiti per gli n conci è rappresentata dalla (3)

$$\frac{w_j + w_{j+1}}{2} = \frac{1-\nu_t^2}{E_t} L \sum_{i=1}^n p_i F_{ij} \quad (3)$$

Ove con F_{ij} è stata indicata la funzione d'influenza che dipende da $C = L/B$, da n ed è funzione della variabile s , come indicato nella (4).

$$F_{ij} = \frac{1}{\pi c} \left[-\frac{1}{s} \ln(\sqrt{1+s^2} + |s|) + \ln \left(\sqrt{1 + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}} + \frac{1}{s} \right) \right] \frac{s_1}{s_0} \quad (4)$$

essendo i limiti d'integrazione espressi dalla (5):

$$s_1 = \frac{n}{c(2j-2i-1)} \quad s_0 = \frac{n}{c(2j-2i+1)} \quad (5)$$

La soluzione del problema, che non dipende dal numero di conci per $n > 20$, può essere ottenuta per una data condizione di carico in forma adimensionale in funzione dei rapporti L/B ed L/λ che viene assunto come parametro che tiene conto della rigidità della trave e del terreno. Con L si intende la lunghezza della trave e λ viene definito dalla (6), in analogia alla soluzione della trave su terreno alla Winkler:

$$\lambda = \left[\frac{2EJ(1-\nu_t^2)}{B E_t} \right]^{1/3} \quad (6)$$

Nel presente lavoro viene proposta una nuova formulazione della funzione di influenza per un mezzo elastico stratificato di spessore limitato con modulo elastico variabile con la profondità ottenuta a partire dal metodo approssimato per il calcolo del cedimento di una fondazione rigida proposto nel 2009 da Dalerci e Bovolenta.

Modello semiempirico per il calcolo della deformata della superficie di campagna di un mezzo elastico caricato da una fondazione rigida

Nel 2009, Dalerci e Bovolenta hanno proposto un modello, semiempirico, per il calcolo del cedimento di una fondazione circolare o rettangolare un terreno di spessore limitato dotato di un modulo elastico di Young variabile linearmente con la profondità, e per il calcolo della superficie di campagna.

La validità di tale modello è stata provata mediante il confronto con analisi agli elementi finiti con i codici di calcolo Plaxis 8 ed Ansys 12. Per brevità, si riporta soltanto un caso relativo ad una piastra circolare su uno strato omogeneo di terreno, in condizioni di assialsimmetria. Il confronto (Figura 1) tra Ansys, Plaxis ed il metodo approssimato mette in evidenza la quasi coincidenza dei cedimenti della piastra e dimostra come il modello risulti innovativo in quanto consente di considerare la diffusione delle tensioni nel terreno e di valutare la deformata del piano di campagna. L'estensione di quest'ultima risulta identica sia nel modello approssimato che nelle più onerose soluzioni agli elementi finiti.

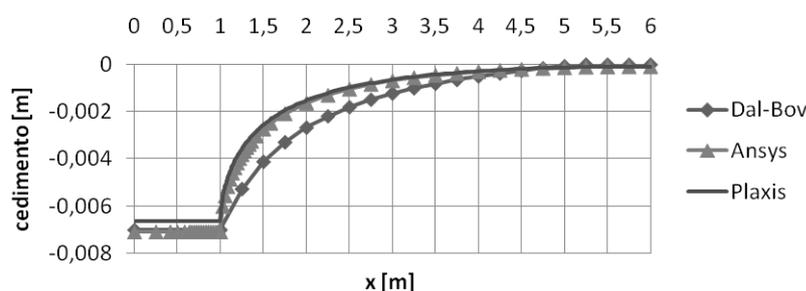


Figura 1. Piastra su terreno omogeneo di spessore limitato

La trave di lunghezza finita su strato compressibile limitato e modulo elastico costante

Nel caso della trave su uno strato compressibile di spessore limitato con modulo elastico costante, si può ancora fare riferimento alla *funzione d'influenza* F_{ij} indicata in (4)

moltiplicandola per il coefficiente d'influenza proposto da Dalerci e Bovolenta (2009) che tiene conto dello spessore H di terreno compressibile omogeneo.

Tale coefficiente d'influenza indicato con I_{HE} è espresso dalla (7):

$$I_{HE} = \frac{\ln\left(\frac{\frac{B}{H} + \alpha}{\frac{B}{H} + \frac{B}{L} + \alpha}\right)}{\ln\left(\frac{L}{B}\right)} \quad (7)$$

In Figura 2 e 3 sono rappresentati i cedimenti di una trave su suolo elastico di potenza H a cui è applicato rispettivamente un carico verticale baricentrico ed un carico verticale ad un estremo. Tali cedimenti, ottenuti mediante analisi agli elementi finiti (serie *ansys*), sono stati confrontati con quelli dedotti con diversi modelli per il terreno: semispazio elastico alla Boussinesq (serie *boussinesq*); modello di Boussinesq modificato mediante l'uso della (7) (serie *boussinesq1*); modello illustrato nel seguito (serie *dal-bov*). Si può notare come, ad esclusione del caso di semispazio elastico, gli andamenti siano in buon accordo.

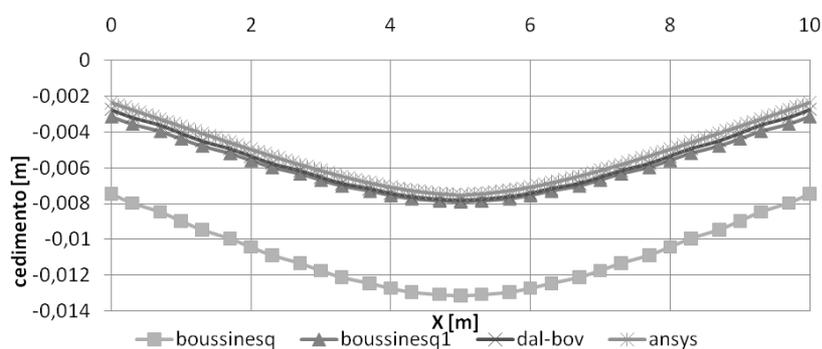


Figura 2. Trave su terreno di spessore limitato H con carico concentrato baricentrico

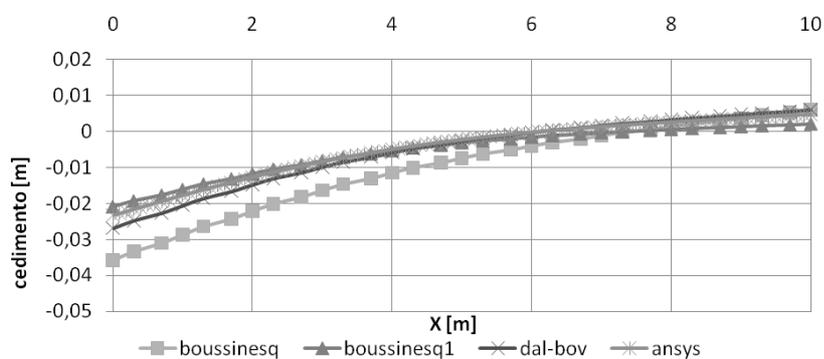


Figura 3. Trave su terreno di spessore limitato H con carico concentrato applicato ad un estremo

La trave di lunghezza finita su strato compressibile limitato e modulo elastico variabile

Per l'analisi della trave di lunghezza finita su strato compressibile di spessore H e modulo elastico variabile con la profondità si può ancora far riferimento all'approccio proposto da Dalerci e Bovolenta (2009), formulando direttamente la funzione d'influenza.

Si suddivide, come sopra descritto, la trave di lunghezza L e di larghezza B in n elementi uguali. Ogni singolo elemento della trave si può studiare come una fondazione rigida di larghezza \bar{B} (pari all' n -esima parte della reale lunghezza della trave) e lunghezza \bar{L} (pari alla reale larghezza della trave) su un terreno elastico di spessore limitato H e rigidità E variabile con la profondità z rispetto al piano di posa. Nel seguito si indicherà con E_0 è il modulo di Young corrispondente alla quota del piano di posa e con K è il gradiente di variazione del modulo di Young. Si ipotizza un carico Q applicato verticalmente nel

baricentro, ovvero una pressione p uniformemente distribuita sulla fondazione. In analogia a quanto assunto da Dalerci e Bovolenta (2009) per il caso della piastra, si considera che la pressione si diffonda linearmente nel terreno in funzione della profondità. Sotto ad ogni concio, il terreno viene quindi schematizzato come un pilastro tronco-piramidale (Figura 4), cioè a sezione rettangolare crescente linearmente con la profondità, sollecitato assialmente in sommità e caratterizzato da un modulo elastico variabile linearmente con z .

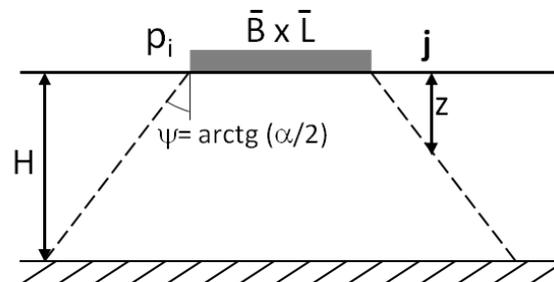


Figura 4. Singolo concio della trave su terreno elastico disomogeneo di spessore finito

Per il singolo concio risulta:

$$\bar{B} = \frac{L}{n} \quad \bar{L} = B \quad (8)$$

$$x_i = \frac{L}{n} (i - 0.5) \quad x_j = \frac{L}{n} (j - 1) \quad (9)$$

$$x = |x_i - x_j| \quad z = \frac{2x - \bar{B}}{\alpha} \quad (10)$$

E' possibile adattare la soluzione che era stata dedotta da Dalerci e Bovolenta (2009) per il caso di piastra rigida rettangolare al singolo concio della trave e calcolare, mediante la (11) il cedimento w_j nel generico punto j (Figura 4), tenendo conto della (12), ossia del valore di α per piastra rettangolare che è il gradiente di variazione dei lati del pilastro tronco-piramidale con la profondità.

$$w_j = \frac{p_i \bar{B} 0.87(1-\nu_t^2)}{E_0} \frac{1}{\left[1 - \frac{K\bar{L}}{\alpha E_0}\right]} \left[\frac{\ln \frac{\frac{\bar{B}}{\alpha H} + 1}{\frac{\bar{B}}{\alpha H} + \frac{\bar{L}}{B}}}{1 - \frac{\bar{B}}{\bar{L}}} + \frac{\bar{L}}{\bar{B}} \frac{\ln \frac{\frac{\bar{B}}{\alpha H} + 1}{\frac{\bar{B}}{\alpha H} + \frac{K\bar{B}}{\alpha E_0}}}{1 - \frac{\alpha E_0}{K\bar{B}}} - \frac{\ln \frac{\frac{\bar{B}}{2x - \bar{B}} + 1}{\frac{\bar{B}}{2x - \bar{B}} + \frac{\bar{L}}{B}}}{1 - \frac{\bar{B}}{\bar{L}}} - \frac{\bar{L}}{\bar{B}} \frac{\ln \frac{\frac{\bar{B}}{2x - \bar{B}} + 1}{\frac{\bar{B}}{2x - \bar{B}} + \frac{K\bar{B}}{\alpha E_0}}}{1 - \frac{\alpha E_0}{K\bar{B}}} \right] \quad (11)$$

$$\alpha = \frac{1}{0.87(1-\nu_t^2)} \quad (12)$$

La funzione d'influenza F_{ij} , espressa dalla (13), dipende da C e da n e tiene conto della presenza di un terreno di spessore finito H e della variazione del modulo elastico con la profondità secondo il gradiente di variazione K .

$$F_{ij} = \frac{0.87}{n \left[1 - 0.87(1-\nu_t^2) \frac{KB}{E_0}\right]} \left[\frac{\ln \frac{\frac{B}{L} + 0.87(1-\nu_t^2) \frac{B}{H}}{1 + \frac{B}{H} 0.87(1-\nu_t^2)}}{1 - \frac{L}{B} \frac{1}{n}} - \frac{\ln \frac{|2i-2j+1|}{1 + \frac{L}{nB} (|2i-2j+1| - 1)}}{1 - \frac{L}{B} \frac{1}{n}} \right] +$$

$$\frac{0.87}{n \left[1 - 0.87(1-\nu_t^2) \frac{KB}{E_0}\right]} \left[\frac{\ln \frac{\frac{B}{KB 0.87(1-\nu_t^2)} + 0.87(1-\nu_t^2) \frac{B}{H}}{\frac{L}{Bn} - \frac{E_0}{KB 0.87(1-\nu_t^2)}}}{\frac{L}{Bn} - \frac{E_0}{KB 0.87(1-\nu_t^2)}} - \frac{\ln \frac{|2i-2j+1|}{1 + \frac{KB}{0.87(1-\nu_t^2) E_0} \frac{L}{nB} (|2i-2j+1| - 1)}}{\frac{L}{Bn} - \frac{E_0}{KB 0.87(1-\nu_t^2)}} \right] \quad (13)$$

Gli andamenti dei cedimenti, indicati come serie *dal-bov*, nelle figure 2 e 3 sono stati ottenuti utilizzando il modello sopra esposto.

La trave di lunghezza finita su terreno stratificato di spessore finito

Quanto descritto sopra, può essere esteso al caso di terreno stratificato. Si può quindi modificare la funzione di influenza per tenere conto di diversi strati all'interno dei quali il modulo di rigidezza varia con la profondità, oppure, come è consuetudine, suddividere il terreno di fondazione in strati con modulo elastico circa costante.

A titolo d'esempio, si considera nel seguito che il terreno di fondazione di una trave possa essere costituito da due strati. Lo strato superiore (contraddistinto come 1) ha potenza H_1 e modulo di Young costante E_1 , mentre lo strato inferiore (indicato come 2) ha spessore H_2 e modulo di Young costante E_2 . Inoltre, si adotta che la diffusione delle tensioni nei due strati sia uguale ossia $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. Ciò comporta: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ e quindi che i lati del tronco di piramide con cui è schematizzato il terreno abbiano uguale inclinazione per i due strati. Si ottiene la equazione (14) del cedimento sotto la fondazione rigida.

$$w = \frac{pB}{(\alpha_1 E_1)} \left[\frac{\ln\left(\frac{\frac{B}{H_1} + \alpha_1}{\frac{B}{H_1 + L} + \alpha_1}\right)}{1 - \frac{B}{L}} \right] + \frac{pBL}{(\alpha_2 E_2)(L + \alpha H_1)} \left[\frac{\ln\left(\frac{\frac{(B + \alpha_1 H_1)}{H_2} + \alpha_2}{\frac{(B + \alpha_1 H_1)}{H_2} + \frac{(B + \alpha_1 H_1)}{(L + \alpha_1 H_1)} + \alpha_2}\right)}{1 - \frac{(B + \alpha_1 H_1)}{(L + \alpha_1 H_1)}} \right] \quad (14)$$

In presenza di due strati con rigidezza E_1 ed E_2 , il cedimento di un generico punto della superficie di campagna (Figura 4) è definito dalle (15) e (16), ove E_t è un modulo elastico del terreno scelto in modo arbitrario.

$$w(z) = \frac{p\bar{B}}{E_t\alpha} \left[\frac{E_t}{E_1} \frac{\ln\left(\frac{\frac{\bar{B}}{H_1} + \alpha}{\frac{\bar{B}}{H_1 + L} + \alpha}\right)}{1 - \frac{\bar{B}}{L}} + \frac{E_t}{E_2} \frac{\bar{L}}{L + \alpha H_1} \frac{\ln\left(\frac{\frac{(\bar{B} + \alpha H_1)}{H_2} + \alpha}{\frac{(\bar{B} + \alpha H_1)}{H_2} + \frac{(\bar{B} + \alpha H_1)}{(L + \alpha H_1)} + \alpha}\right)}{1 - \frac{(\bar{B} + \alpha H_1)}{(L + \alpha H_1)}} - \frac{E_t}{E_1} \frac{\ln\left(\frac{\frac{\bar{B}}{z} + \alpha}{\frac{\bar{B}}{z + L} + \alpha}\right)}{1 - \frac{\bar{B}}{L}} \right] \quad \text{per } z < H_1 \quad (15)$$

$$w(z) = \frac{p\bar{B}}{E_t\alpha} \left[\frac{E_t}{E_2} \frac{\bar{L}}{L + \alpha H_1} \frac{\ln\left(\frac{\frac{(\bar{B} + \alpha H_1)}{H_2} + \alpha}{\frac{(\bar{B} + \alpha H_1)}{H_2} + \frac{(\bar{B} + \alpha H_1)}{(L + \alpha H_1)} + \alpha}\right)}{1 - \frac{(\bar{B} + \alpha H_1)}{(L + \alpha H_1)}} - \frac{E_t}{E_2} \frac{\bar{L}}{L + \alpha H_1} \frac{\ln\left(\frac{\frac{(\bar{B} + \alpha H_1)}{z - H_1} + \alpha}{\frac{(\bar{B} + \alpha H_1)}{z - H_1} + \frac{(\bar{B} + \alpha H_1)}{(L + \alpha H_1)} + \alpha}\right)}{1 - \frac{(\bar{B} + \alpha H_1)}{(L + \alpha H_1)}} \right] \quad \text{per } z > H_1 \quad (16)$$

I grafici in Figura 5 e 6 mostrano alcuni confronti con codici di calcolo agli elementi finiti nel caso di piastra su terreno costituito da due strati differenti omogenei con moduli di Young E_1 ed E_2 . Il modello proposto consente di cogliere i cedimenti della piastra e quelli del piano campagna con un modesto onere computazionale.

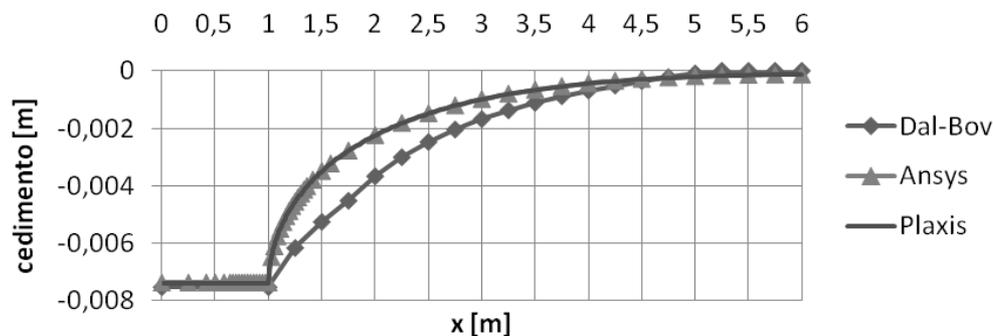


Figura 5. Piastra su terreno costituito da due strati (strato superiore più rigido)

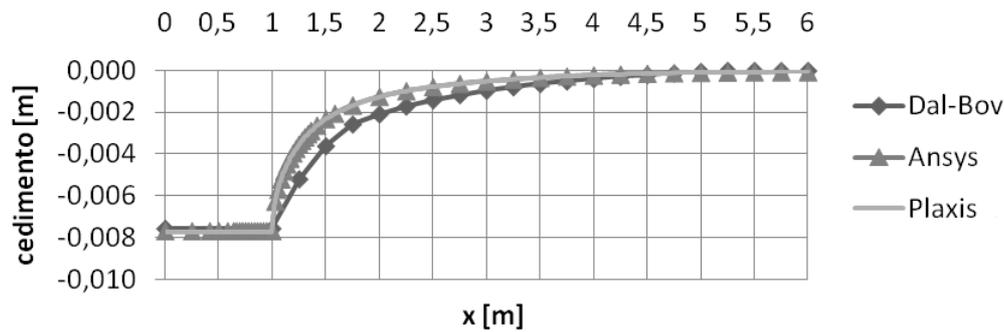


Figura 6. Piastra su terreno costituito da due strati (strato inferiore più rigido)

La funzione di influenza F_{ij} , necessaria per l'analisi della trave di fondazione, può essere espressa dalla (17) e ricavata tenendo conto delle (8), (9), (10), (15) e (16).

$$F_{ij} = \frac{0,87}{n} \frac{w_j}{p_i} \frac{\alpha}{\bar{B}} E_t \quad (17)$$

Analogamente a quanto sopra, sono stati eseguiti confronti con la soluzione ottenuta mediante Ansys 12, non riportati per brevità; le deformate ed i cedimenti sono praticamente coincidenti.

Conclusioni

Nei casi di terreno di spessore compressibile di altezza limitata, terreno con modulo elastico variabile con la profondità o terreno stratificato i modelli di Winkler e di Boussinesq non risultano accettabili oppure richiedono l'introduzione di opportuni coefficienti correttivi.

Nei casi più complessi e più significativi sotto l'aspetto progettuale si ricorre a codici di calcolo che permettono analisi agli elementi finiti, in cui il terreno può essere descritto da leggi costitutive sofisticate e la modellazione di strati molto diversi dal punto di vista geometrico e meccanico non rappresenta un problema, anche se è necessario ricordare che l'impiego di leggi di comportamento sofisticate richiede un'accurata scelta dei parametri (sovente numerosi) caratterizzanti il materiale, parametri non facilmente determinabili con le usuali prove in sito ed in laboratorio.

Il modello proposto nel presente lavoro permette di definire analiticamente i cedimenti sotto un'area di carico rigida e sulla superficie del terreno circostante di un mezzo con rigidezza variabile, stratificato e di spessore limitato. Lo studio dell'interazione terreno struttura è quindi possibile, modificando opportunamente la funzione d'influenza, con gli stessi strumenti numerici utilizzati per la trave su terreno alla Winkler od alla Boussinesq senza la necessità di ricorrere ad onerose analisi agli elementi finiti.

Bibliografia

Dalerci G. (1991) *The beam of finite length on elastic subgrade and the Winkler's Hypothesis*. Tenth European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Italian Contribution to the Conference Theme. Deformation of Soils and Displacements of Structures. Firenze 1991.

Dalerci G., Bovolenta R. (2009). *Un metodo approssimato per il calcolo del cedimento di fondazioni rigide su terreno disomogeneo*. Memoria presentata all'Incontro Annuale dei Ricercatori di Geotecnica IARG 2009, 9-11 Settembre 2009 Sapienza-Università di Roma.