

Gruppo lezioni A3

La stima delle incertezze

1. Introduzione

In questo gruppo di lezioni vedremo come fare una stima delle incertezze in ambito delle misurazioni.

2. Esempio

Quando si vuole misurare la resistenza di un resistore, la lettura che effettua l'operatore sullo strumento (tester, resistometro, ...) è affetta da incertezze. L'operatore, oltre che a conoscere come effettuare correttamente la misurazione di una resistenza, deve essere consapevole che si commettono sempre degli errori e saperli gestire in modo adeguato.

Nella misurazione di una resistenza di modello che si viene ad utilizzare è quel modello che utilizza la legge di ohm. In altre parole: si può supporre che la resistenza faccia scorrere tutta la corrente da un capo all'altro, in modo tale che la corrente che entra da un morsetto esca dall'altro. Inoltre, la tensione che viene misurata è sempre collegata alla legge di ohm. Tale misurazione deve essere correlata con il suo simbolo e con la sua incertezza.

Esistono diversi sistemi per misurare una tensione di una resistenza di metodi principali sono comunque:

- 1) ohmmetro;
- 2) metodo "volt-amperometro";
- 3) ponte di Wheatstone.

Oltre a questi metodi ne esistono altri cinque piuttosto conosciuti per un totale di sette metodi, sebbene esistano altri metodi più esotici e meno conosciuti.

3. Metodi di misurazione di una resistenza

Per misurare una resistenza esistono tre metodi:

1. ohmmetro (o resistometro);
2. metodo **volt-amperometrico** (tramite l'utilizzo di un tester);
3. ponte di Wheatstone.

L'ohmmetro è uno strumento adatto per l'effettuare a misura di un resistore.

Il metodo volt-amperometrico è un metodo che calcola la tensione su un resistore e la corrente che fluisce su tale resistore, e si utilizza la legge di Ohm ($V=R*I$): allora la resistenza non è altro che il rapporto tra la tensione c'è ai capi della resistenza diviso per la corrente che circola attraverso la resistenza. Calcolando questi due valori e facendo il rapporto si trova la resistenza.

Mentre il ponte di Wheatstone è un metodo un po' più complesso dei precedenti ed è un dispositivo elettrico inventato da Samuel Hunter Christie e poi perfezionato da Charles Wheatstone.

4. L'ohmmetro

L'ohmmetro rappresenta uno strumento di misurazione diretta della resistenza, vale a dire che lo strumento è in grado di fornire il valore della misura. Le prestazioni metrologiche sono definite dalle **caratteristiche dello strumento** (qualità e prestazioni), dalle **grandezze di influenza** e dall'**incertezza intrinseca del misurando**, cioè la resistenza stessa è affetta da incertezze che possono essere causate da variazioni di temperatura, da resistenza di contatto e via dicendo.

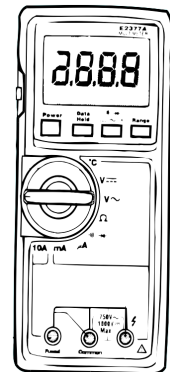
Nota: in questa lezione l'incertezza intrinseca del misurando sarà discussa una sola volta parlando del ponte di Wheatstone.

5. Caratteristiche dell'ohmmetro (e degli strumenti di misurazione in generale)

Le prestazioni di uno strumento di misurazione possono essere ricavate dal manuale di riferimento dello strumento stesso. Solitamente le prestazioni variano in base alla portata che viene impiegata. Per esempio, nel caso di un ohmmetro si può avere una tabella del tipo:

Portata impiegata	Incertezza
300 Ω	0.7% + 2 count
3 k Ω - 3 M Ω	0.7% + 1 count
30 M Ω	2% + 1 count

Nell'ohmmetro qui a fianco è rappresentato il valore 2888. L'ultima cifra (8) è quella significativa.



Con questo strumento, il quale può essere sia uno strumento con uno schermo digitale sia uno strumento con una lancetta analogica, si calcola la resistenza del resistore. Questo strumento a due morsetti in quali devono essere collegati al morsetti della resistenza. Questo strumento sarà in grado di fornirci la resistenza del resistore. Per quanto riguarda invece l'incertezza che bisogna calcolare ogni volta che si misura sarà il costruttore a dare a noi le informazioni per quantificare il grado di fiducia che si può ottenere attraverso la lettura di tale valore. Il costruttore attraverso la taratura dello strumento a creato un modello il quale permette loro di di quantificare l'incertezza che si legge.

Le caratteristiche dello strumento sarà una notte attraverso il costruttore, le grandezze d'influenza invece devono in qualche modo essere valutate da colui che utilizza lo strumento. Le grandezze d'influenza sono tutte quelle grandezze che mentre si misura possono influenzare la misurazione. Queste grandezze o vengono dal mondo circostante. Se ad esempio si misura 1 m la lunghezza di un tavolo mentre c'è un terremoto allora il terremoto è una grandezza di influenza poiché il vetro vibra e quindi non è possibile leggere con accuratezza il valore del metro.

In seguito si hanno delle incertezze intrinseche del misurato poiché si possono avere degli effetti negativi a causa della temperatura ad esempio. Tuttavia nei primi due metodi descritti non viene preso in considerazione tale fenomeno, nell'ultimo metodo invece tale fenomeno deve essere presi in considerazione. Incremento di sono stati elencati in modo crescente di difficoltà tuttavia più la difficoltà aumenta il più in grado di fiducia aumenta o in altre parole l'incertezza diminuisce.

Nella rappresentazione in alto si vede un ohmmetro: è lo strumento che può eseguire la misurazione attraverso un commutatore che permette allo strumento stesso di capire quale misurazione deve fornire. Partendo dal simbolo più in alto, questo strumento è in grado di misurare una temperatura (sebbene sia richiesto di connettere allo strumento un modulo sensibile al calore), è in grado di calcolare la tensione in continua e quella in AC. Tuttavia ciò che a noi interessa per ora è il calcolo della resistenza la quale viene rappresentata dal simbolo che è sottostante a quello che rappresenta la tensione alternata. Questo strumento inoltre è in grado di calcolare anche altre grandezze (che in questo caso non viene denominato **ohmmetro** ma **multimetro**).

Va ricordato che tale strumento proviene dagli Stati Uniti d'America e quindi la virgola italiana è equivalente al punto americano. In fondo allo strumento ci sono tre fori, quello centrale serve per tutte le grandezze e le che si deve misurare, quello a destra serve per misurare le tensioni e le resistenze. Mentre quello restante serve alla misurazione delle correnti.

Il multimetro è in grado di avere diverse portate per ogni grandezza. In particolare per la resistenza si hanno tre diverse portate: la prima arriva fino a 300ohm, la seconda parte da 3Kohm e arriva fino a 300Mohm e l'ultima si aggira attorno ai 30Mohm. Per ogni intervallo di portata viene riportata la rispettiva incertezza, la quale è data o dalla percentuale del valore letto o (come in questo caso) da una formula: "**percentuale del valore letto + costante di count**" (il count è stato inventato da

una casa che produce strumenti di misurazione) che in questo caso può essere 1 oppure 2. Il termine count significa che questo valore fisso deve essere aggiunto all'ultima cifra significativa.

6. Le grandezze di influenza

Il campo di impiego delle grandezze di influenza per il corretto utilizzo dello strumento si trova sul manuale d'uso. Per esempio, un ohmmetro alla temperatura di 25 ± 5 °C funziona correttamente e queste condizioni sono valide fino ad un anno dall'ultima taratura.

Si deve ipotizzare che la misurazione sia eseguita all'interno del campo di impiego perché le misurazioni effettuate possano considerarsi valide.

7. Modello deterministico

La formula per calcolare le incertezze con l'ohmmetro è di tipo binomiale e quindi le incertezze relative inferiori si hanno in prossimità del fondo scala, cioè, lo strumento è più preciso quando si è vicini al fondoscala.

Si prenda per esempio L il valore di una lettura, utilizzando un modello deterministico si scrive:

$$R = 2900\Omega \Rightarrow L = 2900 \Rightarrow$$

$$E_R = 2900 \cdot 0.007 + 1 = 21.3\Omega \Rightarrow \varepsilon_R = \frac{21.3}{2900} \approx 0.0074 \approx 0.7\%$$

$$R = 3100\Omega \Rightarrow L = 310 \Rightarrow$$

$$E_R = 10 \cdot (310 \cdot 0.007 + 1) = 31.7\Omega \Rightarrow \varepsilon_R = \frac{31.7}{3100} \approx 0.01 \approx 1\%$$

Il costruttore garantisce che lo strumento funzioni all'interno di un intervallo di temperatura, la quale può variare tra i 20° fino a 30° centigradi. Al di fuori di tale intervallo i valori di incertezza forniti dal costruttore non sono più garantiti, inoltre la validità di tale strumento dura circa un anno dall'ultima taratura. Tuttavia, leggendo all'interno del manuale attraverso le righe si può notare che in qualche modo lo strumento potrebbe essere utilizzato anche al di fuori di tale intervallo di temperatura sebbene ciò possa in qualche modo influire sul corretto funzionamento. Nell'ambito di questo corso è lecito supporre che lo strumento venga utilizzato all'interno di tale intervallo di temperatura. Si ricorda inoltre che l'azione di compiere una taratura è diversa dall'azione di verifica della taratura. In prima istanza le due operazioni sono identiche tuttavia la prima quella di compiere una taratura è molto lunga poiché si deve verificare ogni singolo valore dello strumento e questo comporta molto tempo e viene fatto di solito solamente quando lo strumento deve essere introdotto nel mercato e infine si può verificare se la taratura è corretta. La verifica della taratura avviene in questo modo: si verificano solamente determinati punti dello strumento e se in tali punti viene indicato di volta in volta sempre un valore corretto allora non risulta necessario verificare altri punti se invece tali punti sono sbagliati allora si deve procedere a verificare anche gli altri punti. Tuttavia per risparmiare tempo e denaro si preferisce verificare solamente quelli determinati punti che sono caratteristici e ci danno un'informazione che lo strumento degli altri punti sia a posto. Di solito tali punti che vengono verificati sono cinque o al massimo otto non di più.

Se la verifica di quei punti durante la messa in taratura si indica che la funzione di taratura è diversa allora bisogna effettuare una nuova taratura per tutto lo strumento e questo procedimento è assai costoso quindi alcune volte si predilige buttar via lo strumento per ricomprarne un altro.

Tornando all'esempio precedente:

- 2900ohm allora si ha una portata da 3Mohm per calcolare l'incertezza si deve dividere per 100 e moltiplicare per 0,7 e aggiungere un 1 come costante.
- se si legge un valore di 310 e stiamo utilizzando una portata da 30Mohm allora si deve moltiplicare per 10 questo è qualcuno che c'è lo dice e si ottiene il valore corretto.

- nell'ultimo caso dell'esempio: si vede come la prima misura è stata fatta mettendo il fondo scala il più vicino possibile alla misura stessa e quindi l'incertezza è molto piccola. Nel secondo caso invece la portata è molto superiore rispetto alla resistenza stessa e quindi l'incertezza è molto grossa rispetto al primo caso. Questo è il motivo per cui si hanno degli strumenti con diversa portata in modo tale da scegliere la migliore portata per diminuire l'incertezza. L'incertezza data dalla formula visto in precedenza ossia con la loro percentuale di una costante è per sto fatto che si preferisce utilizzare il fondo scala più vicino al valore esatto. Per avere un'incertezza estremamente bassa si doveva avere idealmente che il fondo scala dovrebbe coincidere con la misura della resistenza stessa. Se non si usasse con la formula per calcolare incertezza allora si potrebbe utilizzare un fondo scala molto ampio anche per misurare piccoli valori.

8. Modello probabilistico

Appoggiandosi a un modello di tipo probabilistico si devono distinguere due tipi di incertezze:

1. **incertezze di tipo A**: per le quali viene ipotizzata una sola lettura; tali incertezze non sono stimabili.
2. **incertezze di tipo B**: per le quali il costruttore dello strumento di misurazione fa evidentemente riferimento al modello deterministico, quindi è necessario effettuare una distribuzione di probabilità (distribuzione rettangolare: $X \sim U$).

L'incertezza di tipo **A** si ipotizza una sola lettura quindi non avendo più letture non si possono stimarli come dire le incertezze non possono essere stimabili. Per essere stimabili bisognerebbe ripetere la lettura più volte ma non una dopo l'altra: lettura, lettura, lettura, lettura poiché si reggerebbe in questo modo sempre lo stesso valore. Se invece si montasse circuito, si leggesse il valore, si andasse a smontare il circuito, si prendesse una pausa, se le metto magari su un altro tavolo allora il valore letto potrebbe essere differente dai precedenti poiché l'ambiente agisce direttamente sullo stato del sistema e fa sì che tale valore sia differente ogni volta, allora in questo caso sarebbe possibile stimare l'incertezza-

All'interno della fascia di valori possibili sono infiniti.

9. Distribuzione rettangolare

R = resistenza.

L = valore letto sullo strumento.

U_R = distribuzione rettangolare.

$$R = 2900 \Omega \rightarrow L = 2900 \Omega$$

allora:

$$U_R = (2900 \cdot 0.007) / \sqrt{3} = 12 \Omega$$

$$R = 3100 \Omega \rightarrow L = 310 \Omega$$

allora:

$$U_R = (310 \cdot 0.007 + 1) / \sqrt{3} = 19 \Omega$$

La varianza è l'intervallo del incertezza diviso per la radice di 3.

Il calcolo dell'incertezza di tipo **B** si appoggia sulle incertezze di tipo deterministico. Poiché sappiamo sull'incertezza deterministica che all'interno di un determinato intervallo possono rappresentare il valore "vero" della misura. E non c'è modo di sapere quale può essere più probabile rispetto all'altro. Ci viene fornito solamente questo modello, nel quale all'interno di tale intervallo tutti valori sono possibili. Quindi, di solito si indica il valore centrale e la metà della parte laterale che moltiplicata per due ci dà l'intero intervallo. Con il modello **B** che è più olistico invece si può ipotizzare una distribuzione che sia in grado (oltre a dirci qual è intervallo delle incertezze delle misurazioni) ci indica con quale probabilità potrebbe arrivare un valore rispetto ad un altro. La distribuzione rettangolare è una distribuzione che rappresenta molto bene il modello deterministico poiché al di fuori di tale intervallo la funzione è pari a zero e quindi la proprietà che avvenga quel

segnato il vento è uguale a zero o in altre parole la qualità che il valore "vero" sia fuori da quell'intervallo è pari a zero mentre pantani dall'intervallo si ha una probabilità tutta uguale per ogni punto. Sorge un altro problema: poiché in matematica si può dare un valore finito in cui la distribuzione rettangolare viene calcolata, in realtà si deve fornire un intervallo e non un valore preciso perché anche il risultato fornito dalla distribuzione sarà un intervallo di valori che può essere di solito messo al 10% come incertezza.

Distribuzione rettangolare



Ponendo invece di utilizzare una distribuzione rettangolare si può utilizzare una distribuzione trapezoidale la quale è più propensa a fornire il valore sperato mentre i valori che si trovano sui due lati

obliqui sono valori che potrebbero verificarsi con una frequenza minore. Avendo altre informazioni si possono ottenere delle distribuzioni più complesse ed articolate.

10. Metodo volt-amperometrico

Il metodo volt-amperometrico è un metodo di misurazione di tipo indiretto, per cui il valore di resistenza viene calcolato come: $R = V / I$. Quindi, le misurazioni dirette sono quelle di *tensione* e di *corrente*. Ovvero, la *resistenza* è una misurazione indiretta ottenuta dalle misurazioni dirette di *corrente* e *tensione* utilizzando due strumenti: un voltmetro e un amperometro.

Più il modello per calcolare le incertezze è rozzo e più l'intervallo in cui si può provare il valore è ampio; più il modello è complicato/preciso più l'intervallo di incertezza è piccolo. Nel modello deterministico si ha un intervallo piuttosto ampio rispetto a quello probabilistico.

Sebbene l'amperometro esegua una misura indiretta della resistenza, l'utente può supporre che la misurazione sia di tipo diretto. Se lo strumento è tarato e utilizzato nelle condizioni ideali, non è tanto importante il suo *modus operandi* poiché la taratura è una garanzia sulla corretta misurazione e non sul meccanismo dello strumento stesso.

11. Prestazioni del metodo volt-amperometrico

Le prestazioni metrologiche di tale metodo sono definite da:

1. **caratteristiche degli strumenti, grandezze di influenza e composizione delle incertezze;**
2. **incertezza intrinseca del misurando**, ovvero: una resistenza può variare la sua caratteristica in base alle variazioni di temperatura o a resistenze di contatto e via dicendo;
3. il tipo di circuito impiegato per la misurazione: voltmetro "a monte" oppure voltmetro "a valle" (problema del carico strumentale o "consumo").

Si chiama **monte** dove c'è il generatore e **valle** dove si trova la resistenza e si mette lo strumento vicino alla resistenza e questo si chiama **voltmetro a valle** oppure il voltmetro si mette vicino al generatore e questo si chiama **voltmetro a monte**.

Gli strumenti per misurare devono prelevare delle correnti o tensioni o per far muovere le lancette che hanno oppure per far funzionare il loro display. Questa energia la prelevano dalla resistenza ad esempio. Questo concetto rende il nome di consumo. Si leggono tante cose stupide.

Quindi nelle 2 configurazioni può essere che il consumo sia diverso. Su carta forse no ma nella realtà forse si. E quindi è meglio andare a pescare la configurazione che ci da il consumo minore. Perché il consumo altera la misurazione. Quindi per ovviare a questo lo si aggiunge come componenti di incertezza oppure si tiene conto di vari calcoli in modo tale da togliere tale cosa. Tuttavia in quest'ultimo caso i calcoli diventano più problematici e il modello matematico è più complicato.

12. La gestione delle incertezze nel metodo volt-amperometrico e modello deterministico

Nel caso del calcolo della resistenza si esegue una divisione tra due misurazioni (tensione / corrente), quindi l'incertezza totale è definita dalla somma delle incertezze iniziali, ovvero:

$$R = V / I$$

e quindi:

$$\varepsilon_R = \varepsilon_V + \varepsilon_I.$$

Esempio: strumenti elettromeccanici in classe 1.

Secondo il modello deterministico si scrive:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{FS} = 100V \quad \delta V = 1V \quad V = 80V \quad \varepsilon_V = 1,25\% \\ I_{FS} = 10A \quad \delta I = 0,1A \quad I = 4A \quad \varepsilon_I = 2,5\% \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} 1/80 = 1,25 \\ 1/4 = 2,5 \end{array}$$

$$R = \frac{V}{I} = 20\Omega; \varepsilon_R = 3,75\%$$

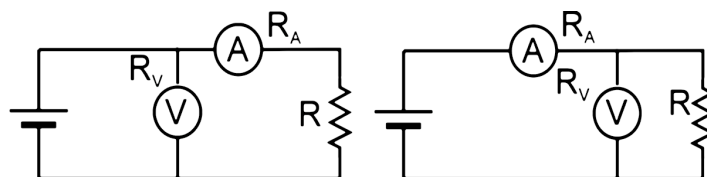
Tuttavia l'incertezza relativa varia "sebbene la classe dello strumento mi indica che solamente l'incertezza non varia". Inoltre, si può notare come misurando un valore distante dal fondo scala si ha un'incertezza relativa maggiore rispetto ad utilizzare il fondo scala e si avvicina di più al valore letto.

13. Modello probabilistico

Discorso analogo a quello dell'ohmetro. Se si usa il modello di classe A tipo probabilistico allora poiché si sono fatte solamente una lettura l'incertezza è pari a zero. Se invece si fanno più letture allora si ha un'incertezza che può essere modificabile come una funzione di probabilità ad esempio trapezoidale. Tuttavia bisogna smontare ogni volta il circuito in modo tale che le misure siano "indipendenti l'una dall'altra" e non si vede sempre lo stesso risultato.

14. La non idealità

Gli strumenti di misurazione non sono ideali, cioè l'amperometro ha una resistenza interna (R_A) che non è nulla mentre il voltmetro ha una resistenza interna (R_V) che non può essere infinità:



Volmetro a valle (SX) e volmetro a monte (DX), queste sono le due configurazioni.

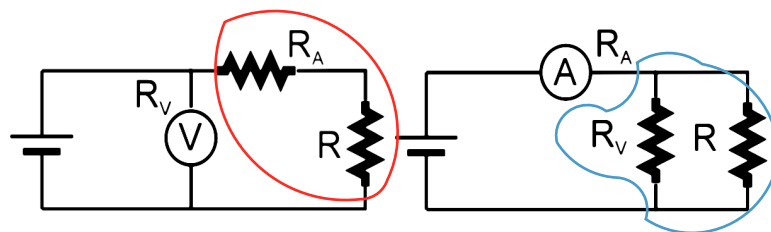
Il costruttore ci da il modello della resistenza come modello del consumo. Poiché il resistore consuma con equazione $R \cdot I^2$.

Il costruttore da come modello di dissipazione di energia la resistenza non perché all'interno dello strumento vi è una resistenza ma perché si suppone che tutti conoscano il modello della resistenza e quindi fa *convergere* tutti i parametri sulla resistenza. In alcuni strumenti (come ad esempio gli strumenti elettromeccanici) si trova una resistenza al loro interno che permette di muovere la lancetta dell'indice di misura. In altri casi invece il consumo viene fornito da circuiti elettrici o elettronici. In sostanza, ogni strumento consuma energia che viene modellizzata con una

resistenza. Inoltre, il voltmetro non ha una resistenza infinita quindi anche questo strumento consuma energia. Quello che si vuole dire è che una resistenza interna non può essere nulla; se l'amperometro fosse ideale dovrebbe avere una resistenza pari a zero poiché questo strumento calcola la quantità di corrente che passa in esso deve riuscire a non modificare lo stato del circuito in analisi. Poiché tale strumento viene posizionato in serie all'interno del circuito (come si vede in figura) si può immaginare di tagliare il filo e porre lo strumento di misura come *ponte* tra i due fili) allora deve far passare tutta la corrente senza caduta di potenziale. In realtà la resistenza interna dello strumento impedisce il funzionamento della misurazione in modo perfetto.

Per quanto riguarda invece il voltmetro, esso deve avere una resistenza infinita, poiché deve essere messo in parallelo con ciò che si vuole misurare e si deve fare in modo che tutta la corrente passi attraverso ciò che si vuole misurare e quindi non passi attraverso lo strumento stesso. Ma siccome la resistenza suo interno non è infinita allora della corrente passerà attraverso questo strumento e danno a un'incertezza alla lettura. Questo strumento deve essere messo in parallelo alle resistenze da misurare. Avendo posto in parallelo lo strumento, la tensione dei suoi morsetti sarà uguale alla tensione degli elementi che si trovano in parallelo (principio di elettrotecnica).

15. Come posizionare il voltmetro



Voltmetro a monte (figura a SX): si misura $r + R_A$ mentre con il voltmetro a valle (figura a DX) si misura $R // R_V$.

I due circuiti mostrano in che modo si possono mettere la amperometro e il voltmetro. L'amperometro ha una resistenza interna non nulla quindi consuma energia; in altre parole l'energia che viene rilevata da questo strumento serve ai fini del funzionamento dell'azione della misurazione. Ambedue gli strumenti sono modellizzati come delle resistenze poiché il costruttore suppone che il compratore sappia il modello matematico della resistenza e che il modello matematico della resistenza simula abbastanza bene la dissipazione o il trasferimento di energia tra l'energia della corrente stessa all'energia termica o nel caso di apparecchi con lancette di energia meccanica.

Nel circuito di destra si ha un amperometro messo a monte mentre il voltmetro è messo a valle. L'amperometro non andrà a calcolare la quantità di corrente assorbita dal solo resistore ma anche la resistenza voltmetro.

In ambedue le configurazioni si può proceder in due modi, poiché si conoscono i circuiti equivalenti; se gli errori sono abbastanza elevati è possibile correggere tali errori; viceversa: se sono molto piccoli li si possono mettere nell'insieme degli errori non correggibili.

Il generatore V del circuito a SX può dare la tensione che vuole perché la tensione la si misura. L'unica esigenza che è che deve stare fermo un tempo X in modo tale che si possa avere la misurazione. Per il modello deterministico intervallo di tempo deve essere anche in pochi secondi mentre per il modello probabilistico deve essere almeno di una o due ore. Quindi l'unica condizione che si chiede al generatore è di mantenere costante il suo valore per quello tempo che serve per eleggere il risultato o per fare in modo che lo strumento possa effettivamente misurare il valore.

16. I “consumi”

Il consumo può essere definito come uno scostamento, poiché può essere descritto da un modello e come tale può essere corretto / compensato, nonostante la correzione non possa mai essere totale (i valori del carico strumentale sono loro stessi affetti da incertezze). Quindi, per prima cosa si cercano le condizioni operative migliori per le quali l'effetto del carico strumentale è al minimo.

17. Il ponte di Wheatstone

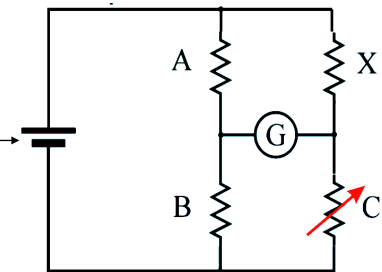
Si tratta di un metodo di misurazione (diretta) in cui il valore di resistenza viene ottenuto confrontando un resistore incognito con una serie di resistori campione.

Tale confronto si effettua ricercando un equilibrio di tensioni, ovvero la misura nulla di una tensione a “a vuoto”.

18. Struttura del ponte di Wheatstone

In sostanza, il ponte di Wheatstone è strutturato come segue, nel quale conosciamo le resistenze A, B e C mentre la X è la resistenza incognita:

Generatore di tensione continua.

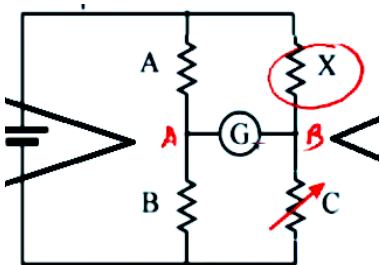


Il generatore può dare la tensione che si vuole perché la tensione la si può misurare. L'unica esigenza che è che deve rimanere stabile per un tempo X in modo tale che si possa effettuare la misurazione. Per il modello deterministico, l'intervallo di tempo può essere piuttosto breve (circa pochi secondi) mentre per il modello probabilistico deve essere più lungo, da circa una a due ore. Quindi, l'unica condizione per il generatore è quella di mantenere costante il suo valore per il periodo di tempo specificato precedentemente che serve per leggere il risultato o per fare in modo che lo strumento possa effettivamente misurare il valore.

Il campione di confronto C viene variato fino a quando il galvanometro G indica parità (situazione di equilibrio).

La formula relativa è:

$$R_X = \frac{R_A}{R_B} R_C \quad \text{Dove } R_X \text{ è il misurando e } R_A / R_B \text{ rappresenta il trasduttore “comandato”}.$$



Questo circuito è dotato di un galvanometro il quale è in grado di misurare la tensione dal morsetto A (in rosso) al morsetto B (in rosso). Si utilizza tale strumento è capace di misurare tensioni molto piccole che tendono allo zero. Sta di fatto che quando la tensione tra i punti A e B è pari a zero allora si è effettivamente trovato il valore della misura.

Quando lo strumento assegna il valore zero come differenza di potenziale allora si può calcolare attraverso le leggi dell'elettrotecnica la resistenza incognita R_X che è indicata

nell'espressione sopra alla figura. Le resistenze (A,B,C) sono resistenze campioni ossia si conoscono a priori il loro valori ma hanno anche loro incertezze, come ogni campione che si rispetti. Nel manuale per l'utilizzo viene specificato come trattare queste incertezze.

19. Prestazioni metrologiche

Sono definite da:

1. **caratteristiche dei resistori impiegati;**
2. **grandezze di influenza;**
3. **risoluzione del galvanometro;**
4. **fenomeni secondari:** forze termoelettromotrici, resistenze di contatto, ...;
5. **incertezze intrinseca del misurando:** effetto della temperatura, resistenze di contatto,

In questa pagina si cerca di affermare o di precisare che per ciascuna misurazione si devono prendere le dovute precauzioni. In altre parole, si deve conoscere la caratteristica delle resistenze impiegate e quindi delle loro incertezze e quando si possono utilizzare. Inoltre, si devono guardare le grandezze di influenza, se si misura la resistenza incognita a una temperatura estrema allora la misurazione non è più valida. Inoltre bisogna considerare la risoluzione dello strumento che si utilizza (in tal caso è il galvanometro). Se tale strumento ha una buona precisione allora valgono le regole dell'elettrotecnica mentre se la precisione bassa allora si ha un'incertezza molto grande. Si devono considerare anche altre incertezze come quella elettromeccanica. Naturalmente a seconda dei casi si predilige l'una rispetto all'altra.

Vale la regola del buon senso.

20. L'incertezza dei resistori

L'incertezza sulla resistenza campione R_x (relativa ai resistori che vengono impiegati) si ottiene con le regole di composizione delle incertezze (tramite modello deterministico):

$$R_x = (R_A \cdot R_C) / (R_B)$$

quindi:

$$\varepsilon_{R_x} = \varepsilon_{R_A} + \varepsilon_{R_B} + \varepsilon_{R_C} + \varepsilon_{\delta_i}$$

I termini ε_{δ_i} rappresentano gli effetti secondari di cui si tiene conto nel calcolo delle incertezze.

Nel manuale d'uso sono indicate le temperature ideali di operatività delle resistenze di confronto A, B e C.

Nota: per il calcolo delle incertezze ε si è tenuto conto delle grandezze di influenza (temperatura, tempo, ...).

21. L'incertezza del galvanometro

L'incertezza σ_x dovuta al galvanometro si determina sperimentalmente squilibrando leggermente il ponte:

$$\sigma_x = \frac{\left(\frac{\Delta R_x}{R_x} \right)}{\left(\frac{\Delta e}{\delta e} \right)} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} R_x & \text{è il valore di equilibrio di } X \\ \Delta R_x & \text{è la variazione intorno all'equilibrio} \\ \Delta e & \text{è la deviazione prodotta da } \Delta R_x \\ \delta e & \text{è la minima deviazione apprezzabile} \end{cases}$$

Il galvanometro non segna la misurazione in modo ottimale quando tra i due punti c'è un potenziale nullo. Allora per correggere tale errore si è pensato di realizzare le resistenze A, B e C in modo tale che siano fisse, mentre A e B sono realizzate con una

precisione piuttosto grossolana, la C è variabile in modo molto fine e quindi nel complesso il sistema risulta essere molto preciso.

La misurazione inizia ponendo il galvanometro a zero dopodiché si regola la variazione della resistenza X; il galvanometro fornirà diversi valori (man mano che viene cambiato il valore di X) e tali valori vanno messi nella formula al posto del simbolo Δe .

Per quanto riguarda la formula per il calcolo della resistenza Rx (la quale nella rappresentazione grafica corrisponderebbe a Rc) il Δe che sta al denominatore della formula è la risoluzione del galvanometro. Ossia è la minima variazione apprezzabile dello strumento. Se lo strumento è digitale allora è l'ultima cifra che si riesce a leggere.

Quindi con tale formula squilibrando un minimo il ponte si riesce a dare una stima di incertezza del galvanometro.

22. L'incertezza totale (modello deterministico)

L'incertezza stimata finora è, quindi, quella composta dai seguenti termini:

$$\mathcal{E}_{R_X} = \mathcal{E}_{R_A} + \mathcal{E}_{R_B} + \mathcal{E}_{R_C} + \sigma_X + \dots$$

23. Effetti secondari

L'incertezza dovuta ad alcuni effetti secondari può essere valutata con prove *ad hoc*. I principali effetti secondari sono:

1. le forze termoelettromotrici (FTEM);
2. le resistenze di contatto.

È possibile correggere tali effetti utilizzando opportuni modelli e si possono ridurre le loro azioni utilizzando opportuni procedimenti.

Si è calcolato l'errore del galvanometro supponendo la non idealità del dispositivo.

Le incertezze di questo ponte non sono riconducibili a incertezze di tipo chimico ad esempio ma sono riconducibili a altri effetti secondari come le forze termo elettromotrici e le resistenze di contatto. Tali errori si possono classificare e correggere utilizzando due modelli:

1. modelli che attutiscono l'impatto degli errori;
2. procedimenti che riescono a minimizzare l'errore.

24. La FTEM

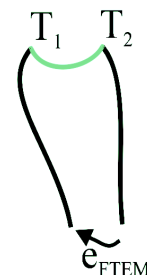
La FTEM (Forza TermoElettroMotrice) è una tensione che si genera quando:

1. esiste una giunzione tra materiali diversi;
2. esiste una differenza di temperatura tra i punti del circuito.

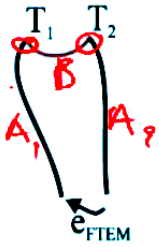
Tale forza viene espressa come:

$$e_{FTEM} = f(T_1 - T_2) \approx \alpha(T_1 - T_2) + \beta(T_1 - T_2)^2 + \dots$$

$$\alpha \approx 5 \div 50 \mu V / K; \beta \approx 0$$



La FTEM è una tensione che si viene a formare quando sono messi a contatto due materiali omogenei e tra i quali viene messo un materiale di diverso tipo (ma sempre omogeneo).



I materiali che compongono i due cavetti A1 e A2 sono identici tra loro, mentre il materiale che compone il filo B è composto da un materiale diverso dal precedente. Si supponga che A sia un comune filo di rame omogeneo e che A abbia o non abbia al suo interno (non cambia niente) un gradiente di temperatura. Mettendo a contatto A1 con il filo A2 attraverso il filo B nei punti T1 e T2, allora se $T1 \neq T2$ allora c'è passaggio di corrente. Quindi la forza elettromotrice e_{FTEM} è lo sviluppo in serie di Taylor ad un grado sufficientemente alto si può ricavare in modo sperimentale che i parametri come α e β valgono:

- $\alpha = (5 \div 50) (\mu V / K)$;
- $\beta \approx 0$.

Il fatto che β sia prossimo allo zero fa in modo che i termini superiori al primo grado dello sviluppo di Taylor possano essere trascurati.

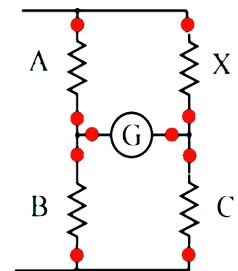
25. Effetto della FTEM

L'effetto della FTEM si trova al minimo quando il circuito è teoricamente in equilibrio. Inoltre, può essere ulteriormente ridotto eseguendo due misurazioni, prima e dopo aver invertito l'alimentazione del ponte.

Nota: le FTEM dipendono fortemente dalla temperatura e non si invertono.

Questo effetto si verifica anche sul ponte, basti pensare che se si esegue una misurazione tra due aree, in cui in una ci picchia il Sole e nell'altra no. A causa della radiazione luminosa la parte illuminata si riscalda e l'altra rimane ad una temperatura inferiore e tutto ciò causa variazioni non trascurabili nella precisione della misurazione finale. Anche una persona che si avvicina abbastanza circuito potrebbe cedere il proprio calore corporeo il quale sommandosi ad altre cause influisce direttamente sulla variazione di incertezza della misurazione.

Quindi l'effetto della e_{FTEM} non è poi così facilmente trascurabile, soprattutto quando i materiali che compongono il sistema circuitale sono molto diversi tra loro. Solitamente i cavi sono di rame, ma la giunzione per le alte resistenze e i cavi possono avvenire attraverso dei connettori i quali possono essere di materiali differenti dal rame. Quindi il circuito non è materialmente omogeneo e quindi in tutti i suoi punti non si ha lo stesso coefficiente di temperatura. Generalmente gli effetti di questa diversità di materiale causa variazioni comprese tra i 50 e i 100 μV . Quindi queste variazioni sono importanti.



Esistono diversi modi per minimizzare questo problema. Alcuni dei quali sono piuttosto rozzi e semplicisti, per esempio possono essere quelli di montare il circuito laddove non ci sono correnti di aria calda oppure quello di costruire un circuito relativamente piccolo in modo tale che se c'è una corrente di aria calda o una fonte di calore esterna questa possa influenzare tutto il circuito in modo uniforme e per questo non dovrebbero notare variazioni significative.

Altri modi possono essere migliori; per esempio, uno di questi è quello di misurare prima con il generatore che ha una determinata posizione (positiva o negativa). In seguito si fa un'altra misurazione invertendo il generatore. Poiché questo fenomeno (le forze termo elettriche derivano semplicemente dal materiale e dalla temperatura di questo materiale ha o meglio dire dalla differenza di materiale e di temperatura) allora è ininfluente cambiare il segno del generatore. Poiché invertendo il generatore non si va a disturbare questa componente che provoca l'incertezza ma, anzi, si riesce in qualche modo a escluderla. L'unica cosa che cambia è il galvanometro che in un caso misurerà una dettagliata di tensione nell'altro caso misurerà un'alta tensione. E facendo la

media di tali tensioni si riesce ad arrivare a un risultato più certo. Un altro sistema è quello di misurare col galvanometro tenendosi un po' più sulla destra o sulla sinistra e quando si va ad invertire il generatore si tiene conto della sua variazione e la si imposta (a SX o a DX) in modo tale da trovarsi in posizione opposta a quella del galvanometro. In tale modo eseguendo la media si è ancora certi di "escludere" tale componente di incertezza o comunque di abbatterla. Poiché in un caso la lancetta andava un po' di più verso sinistra ad esempio e allora dall'altro caso la si butta un po' più a destra in modo tale da compensare le due forze.

Si può fare ciò perché le FTEM non variano al variare del segno del generatore.

Per utilizzare tale metodo si deve supporre che il generatore sia stabile per un tempo a sufficienza che si possano effettuare le due misurazioni senza che il generatore cambi di tensione. Se tale generatore non fosse stabile allora non sarebbe possibile eseguire tale metodo poiché una misurazione sarebbe diversa dalla altra. Questa è la condizione che si deve porre per utilizzare questo metodo. Per l'inversione dei generatori e del galvanometro si utilizzano dei commutatori.

26, ..., 29. La resistenza di contatto

È quella resistenza che si genera dove esiste un contatto mobile tra due conduttori. È causa di vari problemi perché:

1. il valore di tale resistenza varia ogni volta che si fa contatto;
2. il valore di tale resistenza non è conoscibile e si pone in serie ai diversi elementi alterandone i valori.

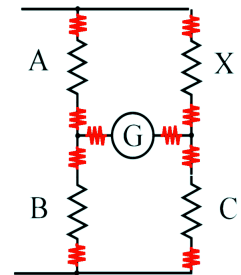
Le resistenze di contatto sono dell'ordine dei centesimi di ohm. Il loro effetto relativo è tanto più elevato quanto sono più bassi i valori di resistenza che si vogliono sottoporre in esame.

I contatti sono due per ogni oggetto, cioè ci sono dieci contatti in ponte di Wheatstone. Ogni contatto si può modellizzare con una resistenza:

L'effetto delle resistenze di contatto può essere diminuito operando (se possibile) con resistori A, B e C di elevato valore.

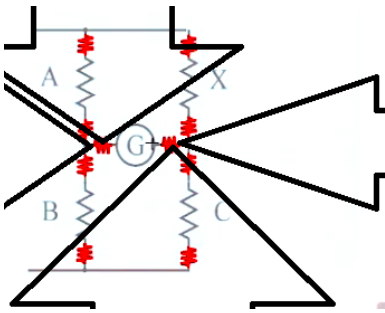
Nota: esistono configurazioni circuitali per *eliminare* l'effetto di alcune resistenze di contatto, ma **non** tutte.

Le resistenze di contatto sono quelle resistenze e si generano quando due circuiti di si uniscono tra loro, quando, per esempio, si collega la resistenza ai fili del circuito. Quindi, anche gli strumenti di misura (in questo caso il galvanometro) avrà delle resistenze di contatto nel momento in cui viene inserito nel circuito tramite delle boccole (ad esempio i cavi banana banana o i cavi bnc). Quindi, quando si collegano due cavi banana banana si ha una resistenza di contatto.



Queste resistenze di contatto possono essere determinanti nella valutazione di una misurazione anche se generalmente si tratta di una resistenza molto bassa mentre non sono importanti se si misura una resistenza molto alta poiché l'errore che si fa in tale caso con una resistenza molto alta è molto piccola rispetto all'incertezza stessa della resistenza di contatto. In altre parole, è come se si volesse misurare la distanza tra Roma e Marsiglia e si ha un'incertezza di qualche metro, e quindi è ininfluenza. Mentre se si calcola la distanza che c'è tra la stazione di Porta Nuova e la stazione di Porta Susa a Torino e si dà il risultato in chilometri e incertezze in chilometri allora è meglio considerare tali incertezze poiché la misura che si vuole ottenere è una distanza dello stesso ordine delle incertezze.

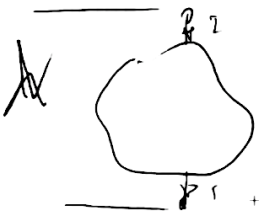
Nel ponte di Wheatstone le resistenze di contatto sono indicate dalle resistenze rosse nella figura.



Come si vede in questa figura tutte le resistenze di contatto sono laddove si è dovuto collegare al circuito un componente come ad esempio quando si è dovuto collegare la resistenza ai fili. Le uniche due resistenze e fosse possono escludere sono le resistenze indicate dalle frecce nere ossia le resistenze in serie al galvanometro poiché la corrente in quel ramo deve essere nulla e quindi qualsiasi resistenza ci sia la caduta di potenziale sarà sempre zero qualsiasi siano le resistenze anche infinite.

Si può eliminare o comunque abbassare tale incertezza ad esempio mettendo sul circuito delle resistenze molto alte tuttavia se la resistenza incognita è bassa allora non è possibile utilizzare delle resistenze elevate. Ciò nonostante si può tranquillamente utilizzare due resistenze elevate per le resistenze A e B che comunemente vengono utilizzate con valori esistiti elevate mentre per le altre due si opta non per questa soluzione poiché si vuole ottenere un risultato più preciso possibile. Inoltre ci sono delle resistenze di dispersione che si verificano a causa delle correnti di perdita. Un modo per evitare queste correnti di perdita è quello di proteggere il conduttore con del materiale isolante. Se si utilizza il ponte di Wheatstone per la misurazione di resistenze molto basse, gli effetti delle correnti di dispersione sono trascurabili. Al contrario: devono essere considerate se si vogliono misurare delle resistenze elevate.

E esistono alcuni modi per arginare il problema delle resistenze di contatto come ad esempio unire efficacemente due contatti quindi ad esempio stringendoli se si usa una pinza che si avvita. Oppure se sono due materiali ossidati sarebbe meglio prima togliere l'ossido, perché l'ossido aumenta la resistenza. Se è il caso si può fare in modo che i contatti siano rivestiti di oro in modo tale che questo materiale che non è isolante faccia fluire molto meglio la corrente.



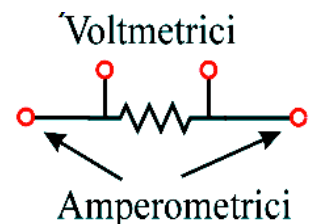
La resistenza finora è stata modellata come la *patata* (nella figura a sinistra) al mondo esterno attraverso due connettori e ai capi di tali connettori una caduta di potenziale.

Ora invece si vuole cambiare tale modello in modo tale che sia più preciso più consono a quello che si vuole fare.

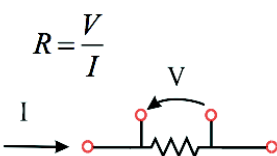
Quindi il modello deve essere più raffinato.

30. Soluzione

Per ovviare il problema delle resistenze di contatto si può prelevare la tensione che definisce la resistenza in modo indipendente dall'adduzione della corrente. Si costruisce quindi il resistore con quattro morsetti: due dei quali sono destinati all'adduzione della corrente (amperometrici) e due destinati al prelievo della tensione (voltmetrici)



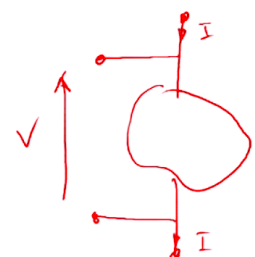
31. Il valore della resistenza del doppio bipolo



$$R = \frac{V}{I}$$

La resistenza del doppio bipolo è ora definita come rapporto tra la corrente I ai morsetti amperometrici e la tensione V tra i morsetti voltmetrici.

Il nuovo modello del resistore è composto da una resistenza alla quale vengono applicati non due morsetti ma quattro morsetti come in figura. Dal due morsetti viene prelevata la tensione mentre dagli altri due la corrente.

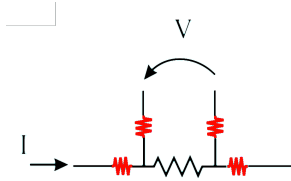


Nel commercio esistono tali resistenze con quattro morsetti. Nel caso non si trovassero basta aggiungere alla resistenza i contatti che mancano in modo

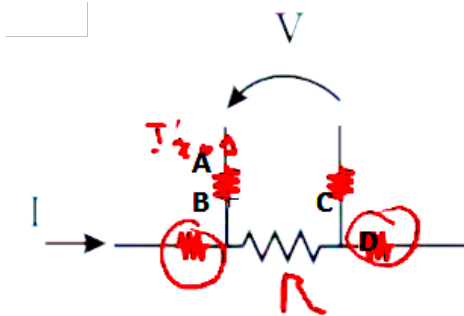
manuale due contatti che verranno considerati come amperometrici mentre gli altri due come voltmetrici.

32. L'influenza delle resistenze di contatto con il doppio bipolo

Le resistenze di contatto ora non influenzano né la definizione, né la misurazione della resistenza R in analisi.



33. L'incertezza con il modello probabilistico



Con questo modello il circuito è completamente diverso e l'equazione che lo non è cambiata. In tale modello si hanno più resistenze di contatto che nel precedente.

Ciononostante, queste resistenze di contatto possono essere annullate visto che si usa un altro modo di interpretare la tensione e la corrente.

Per quanto riguarda la quantità di corrente che passa attraverso la resistenza è influente avere le resistenze B e D poiché è all'esterno della tensione che si misura mentre le restanti due resistenze non vengono prese in considerazione poiché lo strumento che misura la tensione è un strumento che ha al suo interno una resistenza infinita

idealmente e quindi non ci può essere caduta di potenziale su queste due resistenze poiché non c'è passaggio di corrente e quindi le quattro resistenze sono annullate.

Ricordando che per il modello deterministico si aveva:

$$\varepsilon_{R_X} = \varepsilon_{R_A} + \varepsilon_{R_B} + \varepsilon_{R_C} + \sigma_X + \dots$$

Nota: il ponte di Thomson. è un altro modo di calcolare la resistenza.