Rivisitiamo l'irrazionalità di π

di Andrea Centomo
Liceo Statale "F. Corradini" di Thiene (VI)
Email: andrea.centomo [at] istruzione.it

Riassunto

La dimostrazione rigorosa dell'irrazionalità di π è stata data per la prima volta nel 1770 dal matematico Johann Heinrich Lambert ed è stata oggetto nel seguito di diverse rivisitazioni a partire da quella proposta da Adrien Marie Legendre nel 1794. Tra le dimostrazioni dell'irrazionalità di π spicca per semplicità quella proposta da Ivan Niven in [1] che qui viene riproposta con la semplice aggiunta di diversi dettagli.

1 Una classe interessante di polinomi

Nella dimostrazione proposta da Ivan Niven [1] si prendono le mosse da funzioni polinomiali del tipo:

$$f_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \tag{1}$$

dove n, a, b sono numeri **interi positivi** fissati.

1.1 Proprietà di f_n e delle sue derivate

Vediamo di esplorare alcune proprietà della funzione (1) e delle sue derivate.

Lemma 1. *La restrizione di f_n all'intervallo $I = [0, a/b]$ è una funzione limitata:*

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{a^2}{4b}\right)^n$$

per ogni $x \in I$.

Dimostrazione. La funzione f_n, essendo una funzione polinomiale, è continua in I. Quindi, per il Teorema di Weierstrass, f_n ammette massimo e minimo in I. Osservato che in I la funzione è non negativa e che $f(0) = f(a/b) = 0$ è chiaro che il valore minimo assunto dalla funzione è 0. La derivata prima della funzione nell'aperto $(0, a/b)$ è:

$$f_n'(x) = \frac{x^{n-1}\,(a-b\,x)^{n-1}\,(a-2\,b\,x)}{(n-1)!}$$

da cui è immediato concludere che $x = a/2b$ è punto di massimo relativo e, nel nostro caso, anche assoluto. Il valore massimo assunto da f_n in I è allora

$$f_n\left(\frac{a}{2b}\right) = \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{a^2}{4b}\right)^n$$

e ciò conclude la dimostrazione. □

Lemma 2. *La funzione f_n è invariante per la trasformazione affine $x \mapsto (a/b - x)$ ossia*

$$f_n\left(\frac{a}{b} - x\right) = f_n(x).$$

Dimostrazione. Sostituendo si ha:

$$f_n\left(\frac{a}{b} - x\right) = \frac{1}{n!}\left(\frac{a}{b} - x\right)^n (bx)^n = f_n(x).$$ □

Prima di procedere alla dimostrazione di alcune proprietà delle derivate della funzione f_n osserviamo che essa si può riscrivere, ricorrendo alla formula del binomio di Newton, nella forma più espressiva:

$$f_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} = \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k(-bx)^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k(-b)^{n-k} x^{2n-k} \tag{2}$$

da cui appare chiaro che si tratta di una funzione polinomiale di grado $2n$ e che il termine di grado minimo ha grado n.

Lemma 3. *Indicata con $f_n^{(j)}(x)$ la derivata $j-$esima della funzione f_n si ha:*

a) $f_n^{(j)}(0) = f_n^{(j)}(a/b) = 0$ *se* $0 < j < n \quad \vee \quad j > 2n$;

b) $f_n^{(j)}(0) = f_n^{(j)}(a/b) \in \mathbb{Z}$ *se* $n \leq j \leq 2n$.

Dimostrazione. Tenuto conto del fatto che, come visto in (2), $f_n(x)$ è una funzione polinomiale di grado $2n$ con termine di grado minimo n e che vale il Lemma 1 è immediato verificare che la condizione a) è soddisfatta. Per dimostrare la condizione b) supponiamo sia

$$j = 2n - k$$

per un fissato valore di k, $0 \leq k \leq n$. Tenuto conto di (1) si ha che

$$f_n^{(j)}(0) = \frac{(2n-k)!}{n!} \cdot \binom{n}{k} a^k(-b)^{n-k} \in \mathbb{Z}.$$

Infatti da una parte

$$\binom{n}{k} a^k(-b)^{n-k} \in \mathbb{Z}$$

inltre, essendo $(2n-k) \geq n$, anche

$$\frac{(2n-k)!}{n!} \in \mathbb{Z}$$

e quindi il prodotto dei due sarà a sua volta intero. La conclusione della dimostrazione è ora una conseguenza diretta del Lemma 1. □

1.2 Una nuova funzione e le sue proprietà

Consideriamo ora la funzione

$$F_n(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j f_n^{(2j)}(x) = f_n(x) - f_n^{(2)}(x) + f_n^{(4)}(x) + \ldots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)$$

costruita a partire dalle derivate della funzione (1).

Lemma 4. *La funzione F_n assume in* 0 *e a/b valori interi.*

Dimostrazione. Per il Lemma 2 si ha $F_n(0) = F_n(a/b)$ e per il Lemma 3 il valore assunto è intero in quanto somma di numeri interi. □

La funzione $F_n(x)$ e la sua derivata seconda sono legate alla funzione $f_n(x)$ da una semplice relazione:

Lemma 5. *Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha*

$$F_n(x) + F_n''(x) = f_n(x).$$

Dimostrazione. Iniziamo osservando che

$$F_n''(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j f_n^{(2j+2)}(x) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} f_n^{(2j)}(x)$$

e che se j è pari (dispari) allora $j-1$ è dispari (pari). Quindi

$$F_n(x)+F_n''(x)=f_n(x)+(-1)^n f_n^{(2n+2)}(x)$$

da cui, osservato che $f_n^{(2n+2)}(x)=0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, si ha la tesi. □

Corollario 6. *Per ogni $x\in\mathbb{R}$ si ha*

$$\frac{d}{dx}\big(F_n'(x)\sin(x)-F_n(x)\cos(x)\big)=f_n(x)\sin(x).$$

2 Irrazionalità di π

Alla luce di quanto visto in precedenza si dimostra il seguente.

Teorema 7. *Il numero π è irrazionale.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che sia $\pi=a/b$ con a e b numeri interi positivi. Allora avremo che l'integrale definito

$$\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)dx=F_n(\pi)+F_n(0)$$

e il risultato, per il Lemma 4 è un numero intero. Tuttavia per il Lemma 2 e per la monotonia dell'integrale avremo

$$0<\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)dx<\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n\frac{a}{b}.$$

Per un'opportuna scelta di n è possibile fare in modo che

$$\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n\frac{a}{b}<1$$

e quindi giungiamo all'assurdo per cui il numero $F_n(\pi)+F_n(0)$ deve essere un numero intero allo stesso tempo strettamente maggiore di 0 e strettamente minore di 1. □

Bibliografia

[1] I. Niven, *A Simple Proof that π is Irrational*, Bull. Amer. Math. Soc., (1947), vol. 53, p. 509 (disponibile online[1]).

1. http://projecteuclid.org/DPubS?service=UI&version=1.0&verb=Display&handle=euclid.bams/1183510788