

La tassellazione del mulino a vento

una breve nota

di Andrea Centomo

Liceo "F. Corradini" di Thiene (VI)

10 maggio 2009

Riassunto

In questa nota, muovendo dal teorema di Meccanica noto come Teorema del Ritorno di Poincaré, viene proposta una trattazione elementare della proprietà fondamentale della tassellazione del mulino a vento di Conway (pinwheel tiling) per cui in essa i tasselli appaiono orientati in una qualsiasi direzione del piano.



La tassellazione del mulino a vento di Charles Radin, per il Palazzo della **Federation Square**, , Melbourne, Australia. Fotografia di Paul Bourke.

1 Il Teorema del Ritorno

Iniziamo discutendo un esempio. Indichiamo con S^1 la circonferenza di raggio unitario e con g_α la rotazione di un angolo α :

$$g_\alpha: S^1 \longrightarrow S^1, x \longmapsto x + \alpha.$$

Fissato un punto iniziale $x_0 \in S^1$ non è difficile rendersi conto che, se applichiamo ad esso la rotazione g per n volte, possiamo ottenere un punto vicino ad x_0 quanto si vuole. In modo più formale possiamo dire che, preso un qualsiasi $\epsilon > 0$, esiste n tale che

$$|g_\alpha^n(x_0) - x_0| < \epsilon. \quad (1)$$

La dimostrazione di questo fatto è piuttosto semplice. Infatti se prendiamo un qualsiasi intorno U di x_0 di raggio $\epsilon > 0$ (arco di centro x_0 lungo 2ϵ) e consideriamo le immagini

$$g_\alpha(U) \quad g_\alpha^2(U) \quad \dots \quad g_\alpha^n(U)$$

esse avranno tutte lunghezza 2ϵ . Dal momento che la lunghezza di S^1 è finita e pari a 2π deve esistere un valore di n tale che $g_\alpha^n(U) \cap U$ non è vuoto e contiene $g_\alpha^n(x_0)$, da cui allora la (1).

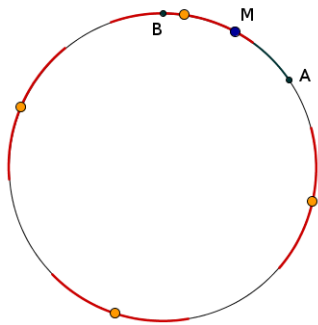


Figura 1. $U =$ arco AB di centro $M = x_0$ e lunghezza 2ϵ : $|g_\alpha^n(x_0) - x_0| < \epsilon$.

In generale si distinguono due casi:

- a) se $\alpha = 2\pi \frac{m}{n}$ è banale osservare che $g_\alpha^n(x_0) = x_0$

- b) se α non è commensurabile con 2π allora l'insieme dei punti $g_\alpha^k(x_0)$, al variare di $k \in \mathbb{N}$, è ovunque denso¹ in S^1 .

L'esempio che abbiamo appena trattato è un caso particolare di un teorema più generale dovuto a H. Poincaré (1854 – 1912) apparso nella celebre memoria *Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique*² con la quale l'autore vinse il premio bandito da Oscar II, re di Svezia e Norvegia, la cui giuria era formata niente meno che da Mittag-Leffler, Weierstrass e Hermite. Il teorema noto come Teorema del Ritorno può essere formulato come segue [1].

Teorema 1. (del ritorno di Poincaré) *Sia g una trasformazione continua, biunivoca, che conservi il volume, che porti una regione limitata D dello spazio euclideo in sé: $g(D) = D$. Allora ogni intorno U di un punto qualsiasi della regione D esiste un punto $x \in U$ che ritorna in U , cioè $g^n(x) \in U$, per qualche $n > 0$.*

Il teorema del ritorno è ben noto a chi si occupa di teoria ergodica e di Meccanica Statistica ed ha conseguenze apparentemente paradossali: se apriamo un setto, che divide una camera piena di gas da una camera vuota, dopo un certo tempo le molecole del gas si raccoglieranno nuovamente tutte nella prima camera. La soluzione del paradosso dipende dal fatto che il tempo necessario per l'accadere del fenomeno è maggiore della vita del sistema solare!

2 Tassellazione del mulino a vento

Parecchi anni fa J. Conway osservò che un triangolo rettangolo T_0 di cateti 1 e 2 può essere suddiviso in 5 triangoli simili ad esso.

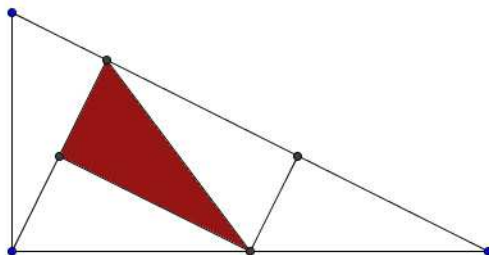


Figura 2. Decomposizione di Conway

Se dilatiamo ciascuno dei 5 triangoli raddoppiandone i lati e rieseguiamo per ciascuno di essi la decomposizione iniziale, iterando, otteniamo una tassellazione del piano nota con il nome di tassellazione del mulino a vento (pinwheel tiling). Il nome particolare dato a questa pavimentazione dipende dalla peculiarità per cui, ad ogni livello di generazione, i triangoli che la formano appaiono orientati in modo sempre diverso andando, all'infinito, a spazzare tutti gli angoli compresi tra 0 e 2π (a meno di opportune congruenze). Utilizzando il Teorema di Poincaré è molto facile rendersi conto di questo. Se infatti consideriamo ad esempio il triangolo centrale T_c , trascurando il fattore di scala, al primo passo iterativo si ha

$$T_c = R(-\alpha)T_0$$

dove $R(-\alpha)$ indica una rotazione oraria di un angolo $\alpha = \arctan(1/2)$ di centro opportuno. L'evoluzione dell'angolo che definisce l'orientamento del tassello centrale è allora descritta dalla rotazione $g_{-\alpha}: S^1 \rightarrow S^1$.

1. In ogni intorno di ogni punto di S^1 cade almeno un punto $g^k(x_0)$.

2. Acta Mathematica 13 (1890), 1-270.

Il nome particolare della pavimentazione sarà stato ben scelto se si riesce a dimostrare rigorosamente che il numero

$$\sigma = \frac{\alpha}{\pi} = \frac{\arctan(1/2)}{\pi}$$

è irrazionale.

Proposizione 2. *Il numero σ è irrazionale.*

Dimostrazione. Iniziamo osservando che

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

da cui

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} (2 + i). \tag{2}$$

Supponiamo quindi per assurdo che σ sia razionale ossia che

$$\sigma = \frac{m}{n}$$

con $n \neq 0$. Allora

$$e^{i2n\alpha} = e^{i2\pi m} = 1$$

e per la (2) anche

$$(2 + i)^{2n} = 5^n.$$

Osservato che nel campo complesso

$$5 = (2 - i)(2 + i)$$

si ha

$$(2 + i)^{2n} = (2 + i)^n (2 - i)^n \quad \Leftrightarrow \quad (2 + i)^n = (2 - i)^n$$

il che è manifestamente falso se $n \neq 0$. □

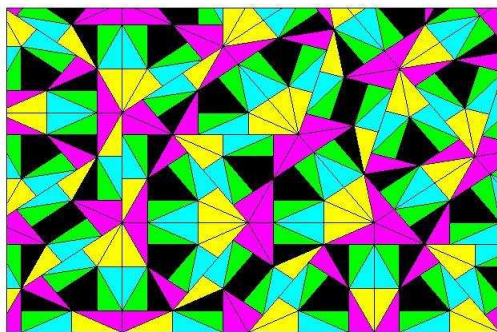


Figura 3. Pinwheel colorato

3 Il frattale Pinwheel

La decomposizione di Conway di Figura permette, se iterata, di generare un insieme autosimile. Più precisamente chiamiamo T_0 il triangolo di partenza, eseguiamo la decomposizione di Conway in cinque triangoli e chiamiamo T_1 la figura che si ottiene rimuovendo da T_0 il triangolo centrale. Ai rimanenti quattro triangoli applichiamo nuovamente la decomposizione di Conway e rimuoviamo il triangolo centrale chiamando T_2 la figura che si ottiene. Iterando il procedimento all'infinito si ottiene un insieme autosimile T la cui forma è simile a quella di Figura 4.

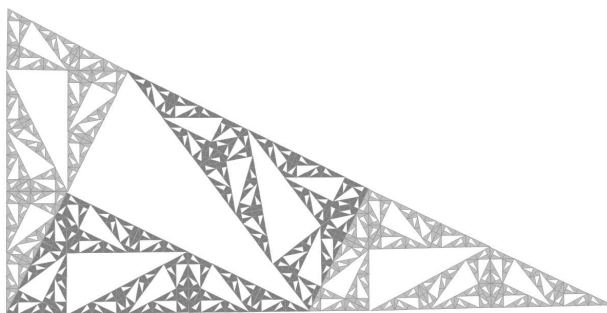


Figura 4. Frattale Pinwheel

Osserviamo che al passo n – esimo della costruzione l’area della figura T_n è data da

$$\mathcal{A}(T_n) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^n$$

e quindi l’area di T sarà espressa dal limite

$$\mathcal{A}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^n = 0.$$

In modo analogo si mostra che T ha perimetro infinito. Figure di questo genere sono ben note in Matematica ed appartengono alla famiglia degli insiemi frattali IFS. Oggetti di questo genere comparvero nel ’900 all’interno di profonde discussioni sull’estensione del concetto matematico di dimensione. In questo ambito all’insieme T viene attribuita una dimensione di similitudine pari a

$$d = \frac{\ln 4}{\ln \sqrt{5}} \approx 1.7$$

e ciò in qualche modo rende conto del fatto che T è un oggetto geometrico “intermedio” tra una linea (dimensione 1) e una superficie (dimensione 2).

4 La tassellazione *quaquaversal*

La tassellazione del mulino a vento si può estendere ad una tassellazione dello spazio che possiede proprietà analoghe. Il tassello che serve a questo scopo ha la forma di un prisma a base triangolare (con lati $1, \sqrt{3}, 2$) e altezza unitaria. In questo caso le orientazioni del prisma nella tassellazione appaiono distribuite uniformemente in modo da spazzare il gruppo delle rotazioni attorno all’origine dello spazio euclideo $SO(3)$.

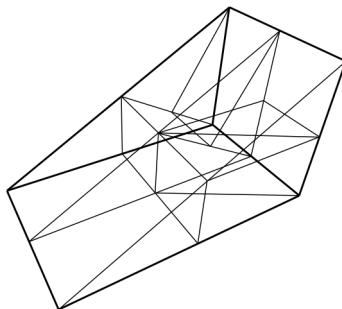


Figura 5. Tassellazione *quaquaversal*

Bibliografia

- [1] V.I. Arnold, *Metodi Matematici della Meccanica Classica*, Editori Riuniti, Roma, 1988.
- [2] M. Senechal, *Quasicrystals and Geometry*, Cambridge University Press, 1995.