

# **POLITECNICO DI TORINO**

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea

## **Descrizione di flussi in tubi collassabili attraverso modelli a parametri concentrati e monodimensionali**



**Tutore:**

Ing. Stefania Scarsoglio

**Candidato:**

Lidia Cancarini

# Sommario

## Introduzione

<b>Capitolo 1: Presentazione del fenomeno</b>	4
1.1 Il tubo elastico a parete sottile	4
1.2 Il resistore di Starling	5
1.3 L'esperimento standard	6
1.4 Altri risultati	9
1.4.1 Limitazioni di portata	9
1.4.2 Oscillazioni auto-eccitate	9
<b>Capitolo 2: Introduzione ai modelli analitici</b>	10
2.1 La necessità di un modello	10
2.2 La classificazione dei modelli	10
2.2.1 Modelli a parametri concentrati	10
2.2.2 Modelli monodimensionali	11
2.2.3 Svantaggi dei modelli	11
<b>Capitolo 3: Modelli a parametri concentrati</b>	12
3.1 Il modello di Pedley, 1980	12
3.1.1 Ipotesi del modello	12
3.1.2 Elasticità	12
3.1.3 Equazioni di conservazione	13
3.1.4 Gli stati di equilibrio	16
3.1.5 Analisi di stabilità	17
3.2 I calcoli di Bertram, 1982	18

<b>Capitolo 4: Modelli monodimensionali</b>	21
4.1 L'impostazione di Shapiro, 1977	22
4.2 Il modello di Griffiths, 1971	23
4.2.1 Introduzione e applicazione fisiologica	23
4.2.2 Le ipotesi del modello	24
4.2.3 Relazione portata-pressione	24
4.2.4 Stabilità del flusso	25
4.2.4 Flusso vicino a una strizione elastica	27
4.3 Verso un'integrazione dei due modelli: il modello Cancelli, Pedley, 1985	28
4.3.1 L'impostazione del modello	29
4.3.2 Aspetti considerati dal modello	30
<b>Capitolo 5: Le applicazioni biologiche</b>	31
5.1 Il sistema cardiovascolare	31
5.2.1 Autoregolazione del flusso sanguigno	32
5.2 Il sistema respiratorio	32
<b>Conclusione</b>	33
<b>Indice delle immagini</b>	34
<b>Bibliografia</b>	35

## Introduzione

I flussi all'interno di tubi soggetti al collasso, ovvero che subiscono una forte riduzione della sezione trasversale, costituiscono un importante campo di ricerca nella fisiologia, in quanto le interazioni fluido-meccaniche tra fluido e pareti deformabili svolgono un ruolo fondamentale in molti fenomeni fisiologici.

Tra questi troviamo relazioni non lineari tra caduta di pressione e portata, la propagazione delle onde e l'insorgere di instabilità indotte dal flusso come le oscillazioni autoeccitate.

Applicazioni biologiche primarie si ritrovano in particolare nel sistema cardiovascolare e nel sistema respiratorio.

Molti esperimenti in laboratorio hanno tentato di far luce sul fenomeno e i modelli che ne sono derivati hanno lo scopo di fornire una comprensione scientifica di questo complesso sistema dinamico.

# Capitolo 1: Presentazione del fenomeno

## 1.1 Il tubo elastico a parete sottile

Se un lungo segmento di tubo elastico uniforme è soggetto a diversi valori di pressione trasmurale  $p_{tm}$  (pressione interna meno pressione esterna), la sezione trasversale e l'area variano come mostrato in fig.1.1 dove troviamo schematizzata la relazione tra pressione trasmurale  $p - p_e$  (dove  $p$  è la pressione interna e  $p_e$  la pressione esterna) in relazione all'area  $\alpha$  della sezione per un lungo tubo a parete sottile. Sono mostrate le sezioni trasversali per diverse aree.

Tale relazione costitutiva, detta "tube law", può essere approssimata dalla teoria del guscio sottile per un tubo elastico assial-simmetrico (Flaherty et al. 1972).

In particolare quando la pressione trasmurale è fortemente positiva il tubo si presenta disteso e la sezione è circolare e rigida. Al diminuire della pressione trasmurale la sezione circolare si deforma e collassa a una sezione ellittica. Ora il tubo è sempre più cedevole e anche piccole variazioni di pressione comportano grandi deformazioni nell'area.

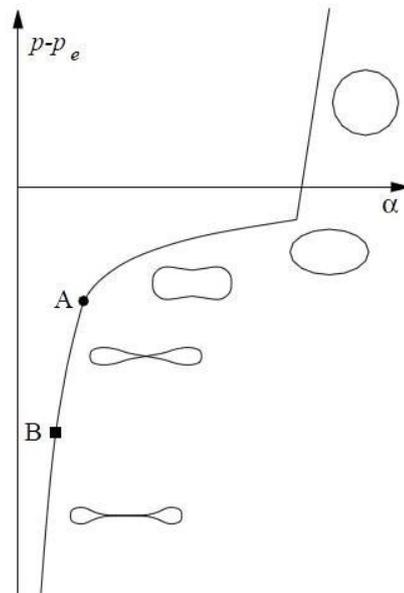


fig.1.1

Maggiori compressioni portano al contatto delle pareti opposte del tubo, prima in un punto, poi lungo una linea. Nei due lobi che si formano le sollecitazioni a flessione si oppongono ad ulteriori riduzioni dell'area di sezione e il tubo è di nuovo rigido.

### 1.3 Il resistore di Starling

L'Esperimento standard si avvale di un'apparecchiatura nota come resistore di Starling. Un segmento di tubo elastico è montato tra due tubi rigidi e chiuso in una camera mantenuta alla pressione controllabile  $p_e$ . (fig.1.2). Una portata  $Q$  scorre imposta da una caduta di pressione  $p_u-p_d$ .

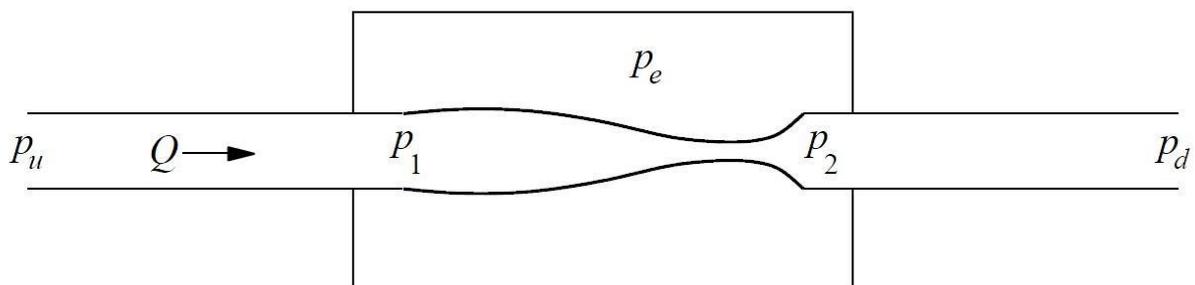


fig.1.2

Le pressioni alle estremità a valle e a monte del tubo elastico ( $p_1$  e  $p_2$  rispettivamente) sono note e possono essere controllate da valvole inserite sui tubi rigidi, in grado di aumentare la resistenza al flusso.

Abbiamo visto come in assenza di portata ( $p_u=p_d$ ) un aumento della  $p_e$  rispetto alla pressione interna comporta uno stress compressivo sulle pareti del tubo che ne causa il cedimento e il collasso da una sezione circolare a ellittica (ad esclusione delle estremità che si congiungono ai tubi rigidi). Una volta deformato, il tubo è fortemente cedevole: piccole variazioni di  $p_e$  portano a rilevanti riduzioni dell'area della sezione trasversale  $\alpha$  fino al contatto delle pareti e alla formazione dei due lobi.

In presenza di una portata e quindi di un gradiente di pressione, diverse interessanti osservazioni possono essere riscontrate al variare dei diversi parametri sul resistore. E' questo lo scopo dell'esperimento standard.

## 1.2 L'esperimento standard

I primi a descrivere l'esperimento tra cui Conrad (1969), Holt (1969), Katz, Chen e Moreno (1969) utilizzarono il resistore di Starling: le pressioni a valle e a monte nei tubi rigidi, rispettivamente  $p_1$  e  $p_2$ , sono misurabili così come la portata  $Q$ . Il fluido è fornito da un serbatoio la cui altezza  $H$ , al di sopra del segmento collassabile, può essere variata, così come le resistenze  $R_1$  ed  $R_2$  di due strizioni variabili a monte e a valle della regione interessata (fig.1.3)

In questo modo è possibile cambiare le condizioni a monte e a valle ed intorno al segmento collassabile indipendentemente.

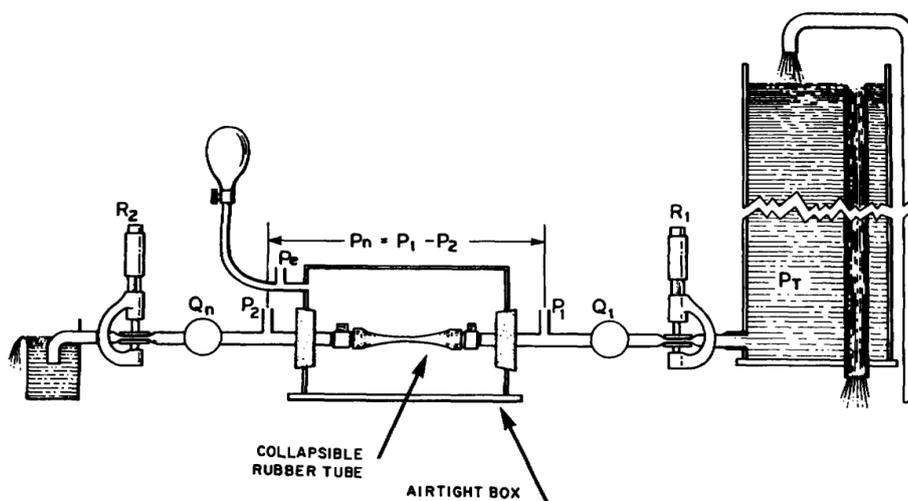


fig.1.3

Descriviamo prima i risultati ottenuti quando la pressione  $p_e$  e la resistenza a valle  $R_2$  sono mantenute costanti.

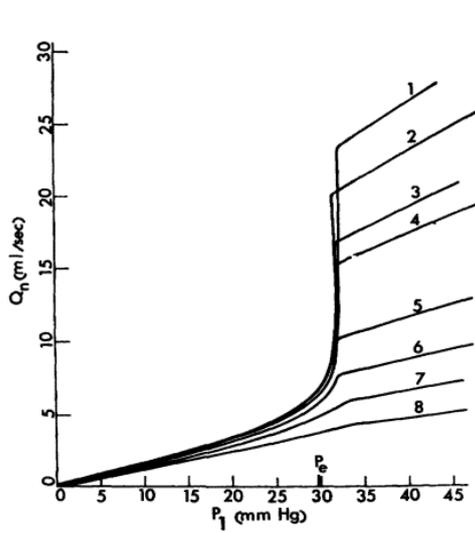


fig.1.4

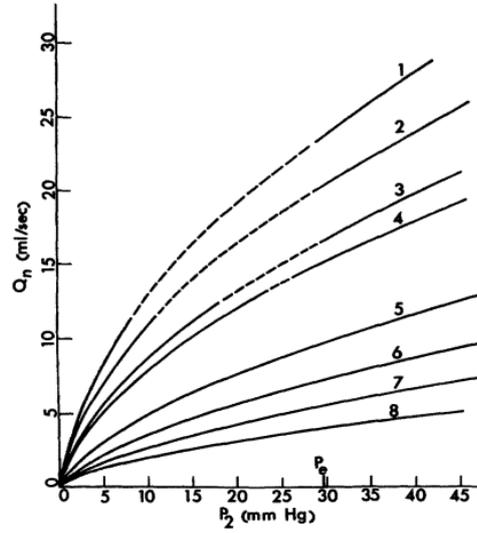


fig.1.5

Nelle fig.1.4 e 1.5 sono mostrati i grafici di pressioni - portata per  $p_1$  e  $p_2$ . Ogni curva corrisponde a un diverso valore di  $R_2$ . Notiamo dal grafico 1.5 che la pressione di valle cresce monotonamente con la portata, ma queste curve non sono lineari bensì della forma:

$$p_2 = k_1 Q + k_2 \quad (1.1)$$

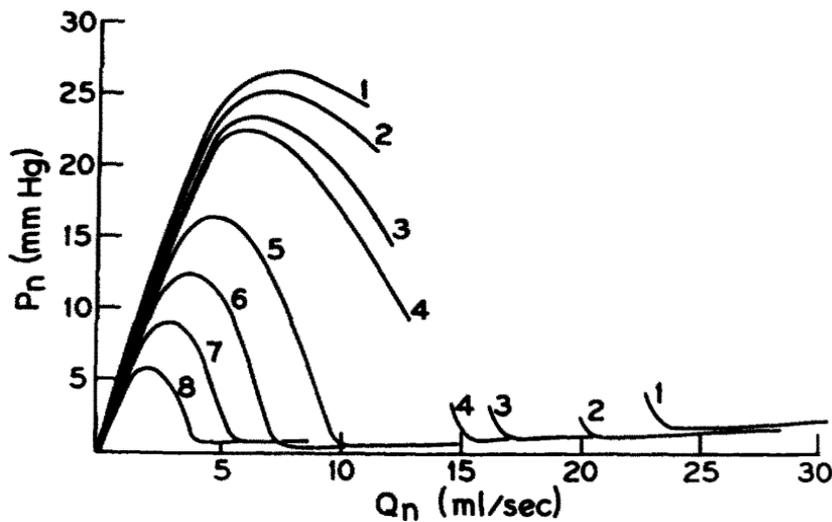


fig.1.6

In fig.1.6 è presentata la caduta di pressione  $\Delta p = p_1 - p_2$  in funzione della portata  $Q$ , sempre a  $p_e$  costante. Anche in questo caso a ogni curva corrisponde un diverso valore di  $R_2$ . Le interruzioni rappresentano le regioni in cui si manifestano le oscillazioni.

La fig.1.7 mostra una singola curva della famiglia di curve presentate precedentemente. Si evidenziano in particolare tre zone caratteristiche:

- (I) dalla (1.1)  $p_2$  cresce con la portata  $Q$ . Per valori sufficientemente alti di  $Q$ ,  $p_2$  può superare  $p_e$ : lungo il segmento elastico la pressione è quindi superiore a  $p_e$  in ogni punto, il tubo è disteso e rigido, la sezione è ovunque circolare. Abbiamo in ogni punto il flusso di Poiseuille con la caduta di pressione  $p_1 - p_2$  proporzionale a  $Q$ .

$$Q = \frac{\Delta p}{R}$$

- (II) Quando la portata è ridotta al di sotto di un certo valore critico, la pressione di valle  $p_2$  diventa minore o uguale a  $p_e$ : la sezione trasversale del tubo elastico si deforma e si deforma e si deforma verso l'estremità di valle dove la pressione risulta inferiore a  $p_e$ . Decrementando ulteriormente la pressione trasmurale, il collasso si estende anche verso valle. Questo comporta un aumento della resistenza al flusso sia a causa della resistenza viscosa che oppone la strizione, sia a causa della dissipazione di energia nel flusso (spesso turbolento) che si separa a valle della zona collassata, dove il tubo elastico si riallarga per congiungersi con quello rigido. Per questo la caduta di pressione necessaria per mantenere la portata (in graduale riduzione) incrementa sensibilmente.

- (III) Infine, quando l'intero segmento è collassato, ( $p_1 < p_e$ ) la sezione presenta la rigida configurazione a due lobi: riducendo ulteriormente la portata  $Q$  non si hanno ulteriori variazioni nella sezione trasversale, la resistenza al flusso è nuovamente costante e di un valore 10-100 volte maggiore rispetto a prima del collasso.

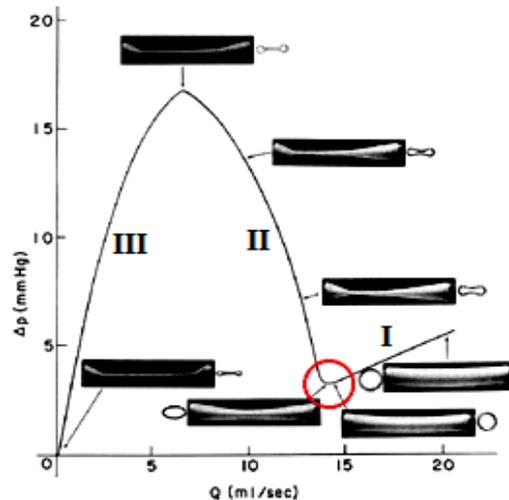


fig.1.7

## 1.4 Altri risultati

### 1.4.1 Limitazione di portata

Variando altri parametri, possiamo osservare nuovi fenomeni:

incrementando la caduta di pressione  $p_1-p_2$  mantenendo la pressione trasmurale di valle  $p_1-p_e$  costante (ciò può essere ottenuto variando  $R_2$  in modo che  $p_2$  cambi indipendentemente da  $p_1$  e mantenendo  $p_1$  e  $p_e$  costanti), notiamo che oltre un certo valore di  $p_2$ , ulteriori riduzioni di  $p_2$  non hanno più effetto sulla portata che rimane costante. un fenomeno chiamato limitazione di portata (fig.1.8).

La variazione di  $p_e$  indipendentemente da  $p_1$  e  $p_2$  ha un effetto prevedibile: se  $p_e < p_2$  non si ha collasso e la portata  $Q$  è indipendente da  $p_e$ , ma se  $p_e$  supera  $p_2$ , è  $p_1-p_e$  a governare il flusso invece di  $p_1-p_2$ . :

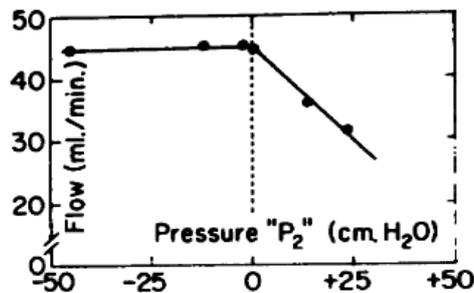


fig.1.8

### 1.4.2 Oscillazioni auto-eccitate

In quasi tutti gli esperimenti sul tubo collassabile con  $Re$  maggiore o circa pari a 200, sono stati trovati intervalli di parametri in cui il flusso stazionario non si realizzava e al contrario, quando il tubo era parzialmente collassato si osservavano oscillazioni indotte dal flusso, ovvero fluttuazioni di grande ampiezza dell'area di sezione, della portata e della pressione. Tali oscillazioni insorgevano nella regione II di fig.1.7, dove il tubo è caratterizzato da maggior cedevolezza e instabilità strutturale.

Bertram et al.(1982, 1986, 1990, 1991) hanno eseguito il maggior numero di esperimenti sistematici sulle oscillazioni auto-eccitate nei tubi collassabili, registrando come funzioni del tempo le pressioni ( $p_1$ ,  $p_2$ ) e le portate ( $q_1$ ,  $q_2$ ) a monte e a valle del segmento collassabile e l'area nel punto di strizione  $A_n$ . Esempi di alcune rilevazioni di  $p_2(t)$  per diversi valori dei parametri sono mostrati in fig.1.9.

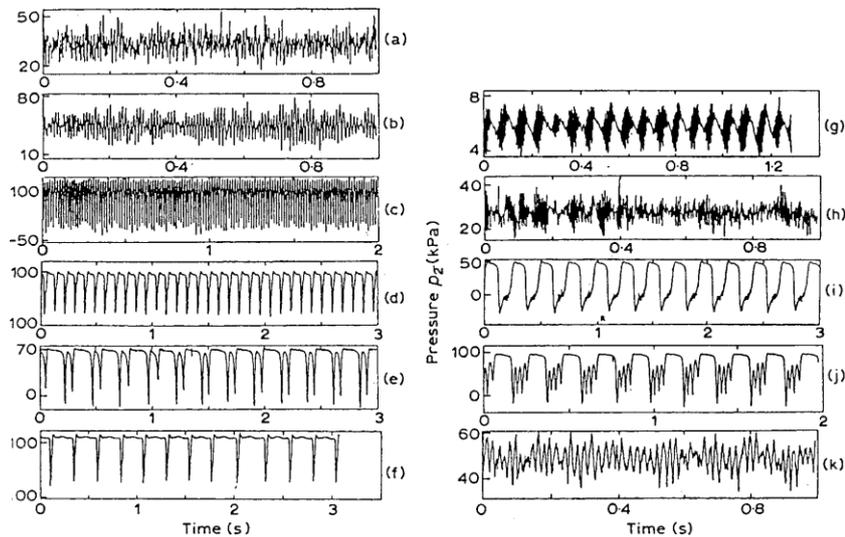


fig.1.9

## Capitolo 2: I modelli

### 2.1 La necessità di un modello

Gli esperimenti in laboratorio, condotti allo scopo di far luce sulle caratteristiche del flusso in un tubo collassabile invariabilmente vedono nascere un'ampia varietà di oscillazioni autoeccitate. Obiettivo dei modelli è di fornire una comprensione scientifica del complesso sistema dinamico in questione. Lo scopo del testo è delineare alcuni dei modelli che sono stati sviluppati per descrivere l'esperimento standard.

Modelli a parametri concentrati e modelli monodimensionali sono stati teorizzati per lo studio del flusso stazionario e delle sue instabilità.

Purtroppo questi modelli si basano su molte assunzioni e ipotesi restrittive ma si sono comunque dimostrati utili per la comprensione di alcuni degli importanti risultati ottenuti dall'esperimento modello.

### 2.2 La classificazione dei modelli

#### 2.2.1 Modelli a parametri concentrati

I primi e più semplici modelli del flusso nel tubo collassabile sono i modelli a parametri concentrati o zero dimensionali, in cui le variabili sono unicamente funzioni del tempo  $t$  e soddisfano equazioni differenziali ordinarie.

La geometria dell'intero segmento collassabile è rappresentata dall'area della sezione trasversale alla strizione  $A_n(t)$  e le proprietà elastiche sono descritte da una relazione univoca tra l'area  $A_n$  e la pressione trasmurale alla strizione  $p_n - p_e$ . Le variabili sono tra loro correlate in equazioni di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia.

Il sistema di equazioni differenziali ordinarie è tipicamente di secondo o terzo ordine (Conrad, 1969; Schoendorfer e Shapiro, 1997; Pedley, 1980, Capitolo 6; Bertram e Pedley 1983)

Questo tipo di modelli è in grado di prevedere le oscillazioni auto-eccitate in certe circostanze e contribuisce ad enfatizzare l'importanza dei vincoli imposti alle oscillazioni dalle proprietà meccaniche dei segmenti rigidi a valle e a monte.

Un fattore importante nelle oscillazioni previste dal modello è la quantità di energia dissipata nel flusso turbolento che si sviluppa dalla strizione: se non vi sono perdite di energia il modello prevede un collasso esponenziale fino all'annullamento dell'area trasversale, senza l'insorgere di oscillazioni; se tutta l'energia cinetica in eccesso è dissipata nel getto senza recupero di pressione a valle, il flusso stazionario è sempre possibile e non si presentano oscillazioni. Solo se parte dell'energia è dissipata e si ha un parziale recupero di pressione il modello prevede le oscillazioni.

## 2.2.2 Modelli monodimensionali

Un secondo gruppo di teorie si basa sull'osservazione sperimentale che il flusso stazionario attraverso il tubo elastico si interrompa solo quando la velocità media sulla sezione trasversale supera il valore locale della velocità di propagazione delle onde di pressione di piccola ampiezza, così che il segnale non possa risalire a valle e il flusso risulta supercritico. Il meccanismo dell'insorgere delle instabilità è quindi analogo al fenomeno del *choking* in un ugello in cui il gas raggiunga la velocità sonica nella sezione di gola e può essere analizzato da un modello monodimensionale in cui le proprietà elastiche del tubo possono essere rappresentate dalla "*tube law*".

Nei modelli monodimensionali le variabili pressione  $p$  e la velocità  $u$  medie sulla sezione e l'area stessa  $A$  di quest'ultima sono funzioni del tempo  $t$  e della coordinata longitudinale  $x$ . La dipendenza dal tempo viene naturalmente a mancare per il flusso stazionario.

## 2.2.3 Svantaggi dei due modelli

Lo svantaggio dei modelli a parametri concentrati sta nella loro incapacità di includere la propagazione delle onde e di distinguere tra flusso subcritico e supercritico, come invece possono i modelli monodimensionali.

Quest'ultimi a loro volta, pur prevedendo l'insorgere di instabilità, non possono essere usati per modellizzare le susseguenti oscillazioni poiché non sono in grado di inglobare né le perdite di energia del flusso separato, né le proprietà meccaniche dei tubi rigidi.

## Capitolo 3: Modelli a parametri concentrati

Una grande varietà di modelli è stata proposta nel tentativo di spiegare l'insorgere e la continuazione delle oscillazioni indotte dal flusso.

Alcuni autori si sono concentrati sull'analisi delle interruzioni locali del flusso stazionario che non possono però essere estese a più complete descrizioni quantitative del flusso che possano individuare oscillazioni non lineari. I modelli a parametri concentrati invece tengono conto di queste considerazioni globali, ma solo a spese di una descrizione sommaria dei fenomeni locali.

Conrad (1969), Katz et al. (1969), Schoendorfer e Shapiro (1977) e Cancelli e Chiocchia (1979) sono tra coloro che hanno previsto le oscillazioni auto-eccitate con questo tipo di modelli e la grande varietà di questi modelli riflette il fatto che anche con un modello a parametri concentrati possano riscontrarsi più meccanismi di instabilità.

### 3.1 Il modello di Pedley, 1980

#### 3.1.1 Le ipotesi del modello

Il modello riguarda l'esperimento standard già descritto.

La semplificazione più drastica sta nello stabilire che la geometria del tubo possa essere completamente descritta da un'unica variabile, l'area della sezione trasversale  $A$  nel punto di strizione verso l'estremità di valle. Questo significa supporre che la forma longitudinale e trasversale del tubo è completamente descritta quando  $A$  è specificata, tensioni longitudinali o curvature della parete indipendenti dall'area non sono considerate.

Una seconda semplificazione sta nel descrivere le proprietà elastiche del tubo per mezzo della relazione univoca tra pressione trasmurale e area della sezione alla strizione.

#### 3.1.2 Elasticità

Nella relazione pressione trasmurale-area

$$p - p_e = P(A)$$

una funzione  $P(A)$  valida dovrebbe includere la soluzione di Flaherty et al. (1972) basata sul fatto che, quando le pareti opposte del tubo sono a contatto, il raggio di partenza non è più rilevante per la relazione pressione-area. Seguendo Shapiro (1977) la forma semplificata per  $P(A)$  che tenga conto di questi risultati:

$$\left. \begin{array}{ll} P_0(1 - A^{-3/2}) & A < 1 \\ 100P_0(A - 1) & A \geq 1 \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

I valori sono tutti adimensionali; l'area  $A$  è adimensionalizzata rispetto all'area circolare non deformata alle estremità del tubo  $A_0$ , per cui si ha  $A < 1$  quando la sezione è ellittica e  $A \geq 1$  quando la sezione è circolare.

Il fattore 100 è arbitrariamente rappresentativo di una grande rigidità quando la sezione è circolare.

### 3.1.3 Equazioni di conservazione

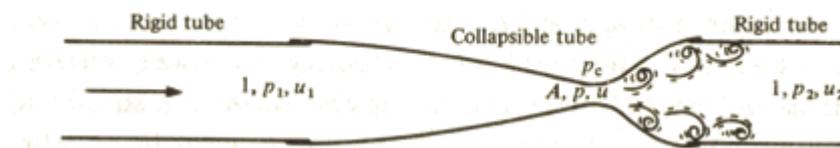


fig.3.1

Il segmento collassabile è rappresentato in fig.3.1 con le aree, le pressioni e le velocità segnalate per tre punti : a valle, a monte e nel punto di strizione. L'unica variabile indipendente è il tempo, le equazioni alla base del modello sono le seguenti:

#### Conservazione della massa

La differenza tra il flusso in entrata e il flusso in uscita nel segmento collassabile è relazionata al cambiamento del suo volume.

Ricordando che nella maggior parte degli esperimenti il collasso è all'estremità di valle, supponiamo che l'intero cambiamento di volume avvenga a valle della strizione. Per questo la portata alla strizione corrisponde alla portata di valle:

$$uA = u_2$$

Mentre per il segmento a valle della strizione

$$u_1 - uA = lA_v$$

dove  $l$  è la lunghezza adimensionale del segmento a monte e  $A_v$  l'area media presa arbitrariamente come

$$A_v = \frac{1}{2}(1 + A)$$

### Conservazione della quantità di moto

Se supponiamo che il flusso entri nel segmento rigido di monte da un serbatoio a pressione costante adimensionale  $P_1$  e che esca dal segmento rigido di valle alla pressione esterna atmosferica, le equazioni di conservazione della quantità di moto per i due tubi rigidi sono:

$$\text{Upstream} \quad P_1 - p_1 = R_1 u_1 + I_1 \dot{u}_1$$

$$\text{Downstream} \quad p_1 = R_2 u_2 + I_2 \dot{u}_2$$

dove  $R_1$  e  $R_2$  sono le resistenze, assunte costanti, dei due tubi rigidi, e  $I_1$  e  $I_2$  le corrispondenti inerzie.

### Conservazione dell'energia a monte della strizione

Si assume che il carico totale tra l'ingresso e la strizione del tubo collassabile vari a causa dell'inerzia del fluido e della resistenza viscosa, quest'ultima localizzata nell'ultimo quarto di lunghezza del tubo dove l'area è più piccola

$$p_1 + \frac{1}{2}u_1^2 - \left(p_2 + \frac{1}{2}u_2^2\right) = \frac{1}{4}l R(A)u + lu_v$$

dove  $R(A)$  è il valore adimensionale della resistenza per unità di lunghezza del segmento collassato, mentre  $lu_v$  è il termine che tiene conto dell'inerzia del fluido quando la lunghezza del segmento a valle della strizione è rilevante.  $u_v$  è definita come la velocità nel punto di area  $A_v$ , prevista circa alla metà del segmento.

Si noti che le perdite di energia dovute alla resistenza sono insignificanti rispetto alle perdite di carico dovute alla separazione del flusso alla strizione.

### Conservazione dell'energia a valle della strizione

Abbiamo già enfatizzato l'importanza delle perdite di carico non stazionarie associate con lo sviluppo di un getto separato, spesso turbolento, a valle della strizione, dove il tubo si riallarga bruscamente. Non può quindi verificarsi un completo recupero di pressione, ma solo una parte di questo.

Per un flusso separato stazionario l'equazione di conservazione potrebbe essere applicata al fluido compreso tra la strizione e un punto a valle di questa dove il getto ha raggiunto le pareti e il profilo di velocità si è riappianato (vedi fig.3.2).

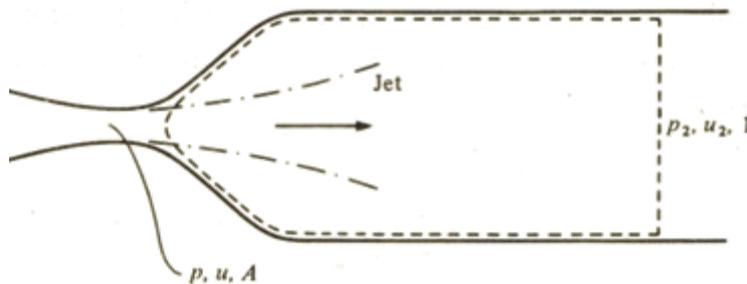


fig.3.2

Non è nota la corrispondente relazione per un flusso non stazionario, perciò assumiamo che le perdite siano relative a un getto quasi stazionario, assunzione che rappresenta una potenziale fonte di errore.

L'equazione dà:

$$p + Au^2 = p_2 + u_2^2$$

sull'ipotesi che le forze longitudinali viscosse sulle pareti del tubo diano un contributo trascurabile.

Ricordando che  $uA = u_2$ , otteniamo:

$$p - p_2 = -f(A)u_2^2 \quad (3.2)$$

dove  $f(A) = \frac{1}{A} - 1$  per  $A < 1$  e  $u_2 > 0$  in modo che ci sia del recupero di pressione.

Ma poichè quando il tubo è disteso (per  $A \geq 1$ ) non abbiamo perdite di carico, possiamo più correttamente usare

$$f(A) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A^2} - 1 \right) \leq 0 \quad \text{se } A \geq 1, u_2 > 0 \quad (3.3a)$$

E' inoltre possibile, come osservato da Bertram, che durante le oscillazioni di larga ampiezza, il flusso alla strizione inverta la sua velocità per brevi istanti di modo che  $u_2 < 0$ .

Anche in questo caso assumiamo perdite trascurabili, quindi

$$f(A) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A^2} - 1 \right) > 0 \quad \text{se } A < 1, u_2 < 0 \quad (3.3b)$$

### 3.1.4 Gli stati di equilibrio

I calcoli degli stati di equilibrio dovrebbero portare a grafici del tipo rappresentati in fig.1.6, dove è graficata la relazione tra caduta di pressione  $p_1-p_2$  e la portata  $Q$ .

Per ogni punto di tale curva quindi, fissata una certa portata  $Q$ , possiamo valutare il valore dell'area  $A$  associato a questa.

Ricordando infatti che nello stato stazionario

$$u_1 = u_2 = Au = Q$$

possiamo scrivere la seguente relazione tra area e portata nella condizione di equilibrio:

$$R_2 Q - f(A) Q^2 = p_e + P(A) \quad (3.2)$$

dove  $P(A)$  e  $f(A)$  sono date dalle (3.1) e (3.3a o b).

La fig.3.3 mostra le soluzioni della (3.2) per i tre casi standard corrispondenti ai valori di  $R_2=50, 75$  e 150. Gli altri valori costanti sono  $P_0 = 4, p_e = 200$  e  $l=10$ .

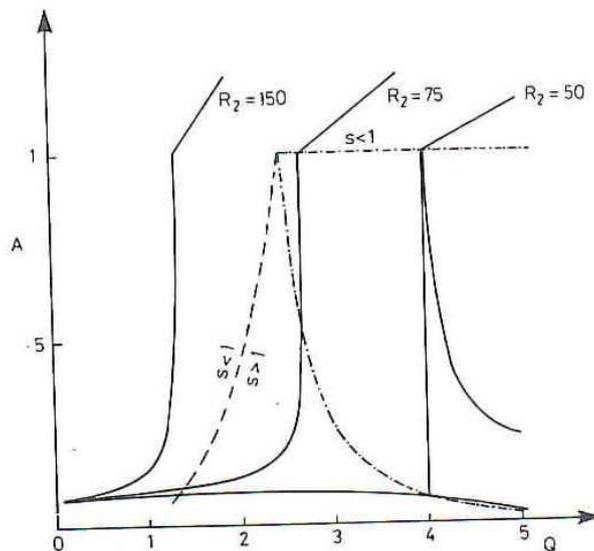


fig.3.3

Consideriamo

$$R_2 \geq p_e / (1.5 P_0)^{-1/2} = 81.65 \quad (3.3)$$

- se la (3.3) è soddisfatta, abbiamo un unico valore di  $A$  che corrisponde ad ogni portata  $Q$  (come nella curva per  $R_2 = 150$ )
- Se  $R_2$  è inferiore a questo valore critico, la (3.2) ha un'unica soluzione per tutte le portate  $Q < \frac{p_e}{R_2}$  e tre soluzioni per  $Q > \frac{p_e}{R_2}$  (come mostrato dalla curva  $R_2 = 50$ ); di queste tre solo la soluzione corrispondente ad  $A > 1$  è di interesse pratico, poichè  $p_2 = R_2 Q > p_e$ : la

pressione è ovunque maggiore di quella esterna, questa configurazione risulta sempre stabile e possiamo identificarla con la situazione a grandi portate e tubo disteso, rappresentata dalla sezione I di fig.1.7.

L'equilibrio fisico presenta una discontinuità in  $A$  per  $Q = \frac{p_e}{R_2}$  che definiamo "collasso catastrofico".  $A = 1$  è sempre l'estremità superiore della discontinuità, i punti inferiori al variare di  $R_2$  sono mostrati in fig.3.3 come una linea spezzata punto e tratto (per  $R_2=75$  questa linea passa per  $A = 0.55$ , le due soluzioni non realizzabili per  $Q > \frac{p_e}{R_2}$  non sono mostrate ma si troverebbero molto vicine alla linea verticale di discontinuità, per  $R_2 = 50$  invece si può notare come la (3.2) dia tre valori di  $A$  corrispondenti a una data portata  $Q$  maggiore che alla discontinuità).

Per un confronto qualitativo sarebbe necessario dimensionalizzare i risultati ottenuti ed è stato osservato che una corrispondenza con gli esperimenti di Conrad può essere raggiunta solo modificando in parte i parametri scelti proprio a causa della grossonalità del modello.

La concordanza qualitativa però fa supporre che i meccanismi fisici principali siano soddisfacentemente inclusi nel modello, almeno per quanto riguarda il collasso graduale.

Quando il collasso è di tipo brusco, la (3.3) non è soddisfatta e le curve caduta di pressione-portata sono assolutamente diverse da quelle riportate negli esperimenti. Questo suggerisce che l'equilibrio previsto per questa configurazione è fortemente instabile e che è dunque in questo caso che si potrebbero presentare le oscillazioni, ma non vi sono ragioni a priori per le quali le oscillazioni non possano svilupparsi anche in caso di collasso graduale.

### 3.1.5 Analisi di stabilità

La stabilità di uno stato di equilibrio e il possibile insorgere delle oscillazioni quando esso è instabile dipendono da quale quantità è mantenuta costante nel momento in cui l'equilibrio viene perturbato. Negli esperimenti si è soliti scegliere come quantità costante il carico totale  $P_T$ .

Possiamo investigare la stabilità degli stati di equilibrio ponendo una perturbazione con legge temporale esponenziale, cosicché le variabili saranno costituite da un valore d'equilibrio (suffisso 0) sommato al termine perturbativo.

$$A = A_0 + a' e^{\sigma t}$$

$$u = u_0 + u' e^{\sigma t}$$

$$u = Q_0 + u_2' e^{\sigma t}$$

sostituendo nelle equazioni fondamentali, linearizzando si ottiene un'equazione cubica per  $\sigma$  del tipo  $C_3\sigma^3 + C_2\sigma^2 + C_1\sigma + C_0 = 0$

Se tutte le radici della cubica hanno parte reale negativa, l'equilibrio è di tipo stabile, se qualcuna di queste ha parte reale positiva, l'equilibrio è instabile.

Se vi è almeno una soluzione reale positiva l'instabilità è classificata come un'instabilità esponenziale, in cui il disturbo cresce monotonamente senza oscillazioni.

Se le soluzioni con parte reale positiva sono tutte complesse, l'instabilità consiste in un'oscillazione crescente.

Un'analisi dei coefficienti della cubica mostra che i valori di resistenza e di inerzie dei tubi rigidi hanno un forte effetto sulla possibile instabilità del flusso e il tipo di instabilità prevista.

### **3.2 I calcoli di Bertram per le oscillazioni**

In fig.3.4 - 3.6 troviamo alcuni calcoli preliminari, i parametri standard sono  $P_0 = 4$ ,  $p_e = 200$  e  $l=10$  per tutti i casi mentre variano  $R_2$  e  $\beta$ , con

$$\beta = \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

rapporto delle resistenze e delle inerzie dei tubi rigidi.

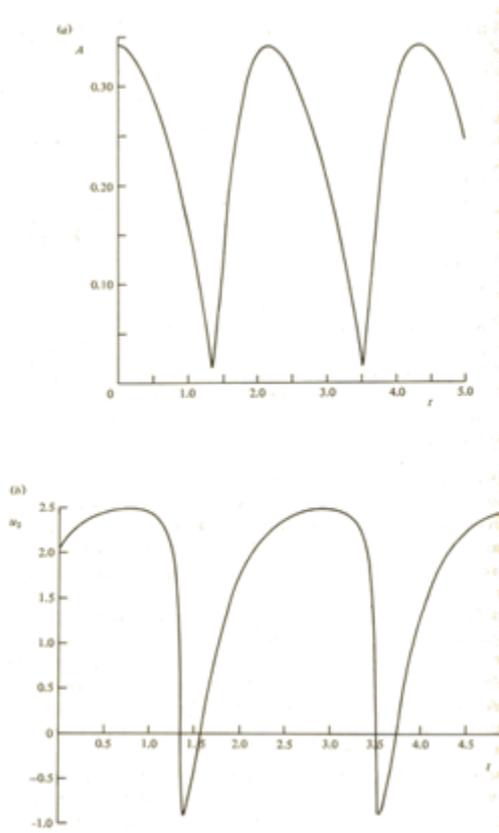


fig.3.4

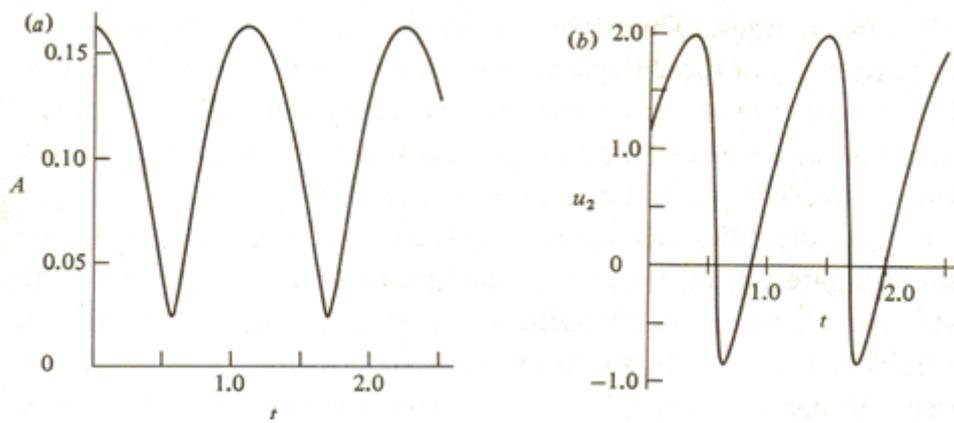


fig.3.5

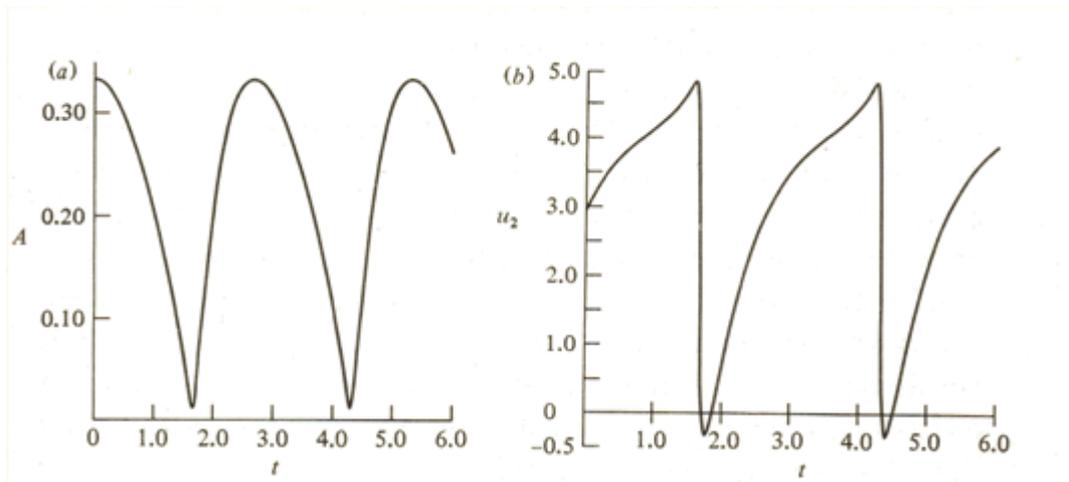


fig.3.6

I grafici di fig.3.4 mostrano  $A$  e  $u_2$  in funzione del tempo  $t$  per  $R_2=75$ ,  $\beta=0.5$ ,  $P_1=259$ , un caso di collasso graduale quando l'equilibrio presenta un'instabilità oscillatoria, mentre in fig.3.5 sono mostrati i grafici corrispondenti in caso di collasso catastrofico ( $R_2=50$ ,  $\beta=1.5$ ,  $P_1=209$ ).

Le oscillazioni hanno diverse ampiezze e frequenze e a volte diversa forma, è da notare come per i grafici di  $u_2$ , come abbiamo già accennato, si hanno tratti di flusso inverso immediatamente dopo l'istante di area minima alla strizione.

In fig.3.6 sono invece mostrate le curve calcolate sempre per un caso di instabilità ma mantenendo fisso  $u_1$  ( $R_2 = 50$ ,  $u_1 = 3$ ). In questo caso la velocità di valle  $u_2$  varia notevolmente e la differenza, per quanto non ancora indagata, è associata a un caso di instabilità esponenziale invece che oscillatoria.

La differenza tra collasso graduale e collasso catastrofico è studiata permettendo a  $P_1$  di scendere gradualmente da un valore abbastanza alto da avere il tubo rigido e non collassato a un valore per il quale invece si ha il collasso. In fig.3.7 sono mostrati gli andamenti di  $A$  nel tempo in tre casi, tutti con  $\frac{dP_1}{dt} = -0.1$

(1) il primo è un caso di collasso graduale, in cui l'instabilità non è mai prevista e le oscillazioni non sono mai previste ( $R_2=150$ ,  $\beta = 1.5$ )

(2) il secondo è sempre un caso di collasso graduale, ma nel quale l'instabilità è prevista per un piccolo intervallo di portate; questa si manifesta come un'oscillazione attenuata man mano che procede il collasso ( $R_2=75$ ,  $\beta=1.5$ )

(3) il terzo è un caso di collasso catastrofico con  $R_2=50$ , i calcoli sono stati compiuti con un valore elevato di  $R_1$  ( $\beta=10^6$ ) in modo da costringere  $u_1$  a essere approssimativamente proporzionale a  $P_1$ , così che le oscillazioni che si sviluppano siano confrontabili con quelle a  $u_1$  costante mostrate in fig.3.6.

Questi risultati, per quanto preliminari, dimostrano che il modello a parametri concentrati è in grado in alcuni casi di descrivere in parte i fenomeni fisici e molti spunti ancora possono essere approfonditi, anche senza prendere in considerazione gli aspetti del flusso non stazionario che non possono essere descritti da un modello a parametri concentrati.

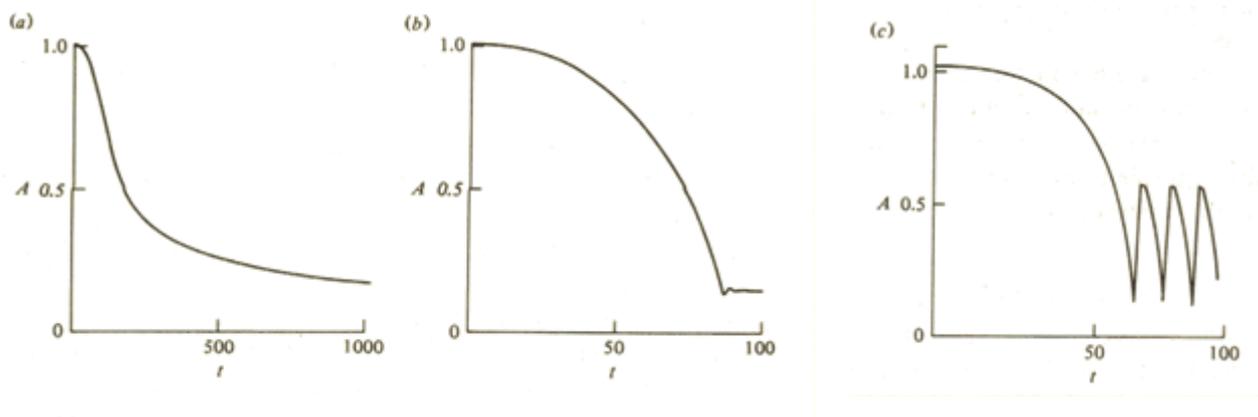


fig. 3.7

## Capitolo 4: Modelli monodimensionali

Rispetto ai modelli a parametri concentrati che considerano solo il comportamento dei fenomeni rispetto al tempo ignorandone la dipendenza spaziale, nei modelli monodimensionali le variabili sono valutate come funzioni non solo del tempo ma anche della coordinata longitudinale  $x$ .

Questi modelli coinvolgono equazioni differenziali parziali per le leggi di conservazione della massa e della quantità di moto, affiancati da una relazione pressione transmurale-area.

Il flusso è trattato come unidimensionale, ovvero la velocità media è uniforme sulla sezione trasversale in ogni punto del condotto e il flusso è parallelo all'asse del tubo, senza componenti normali di velocità.

#### 4.1 I tentativi di Shapiro (1977)

Per un flusso stazionario, non dipendente dal tempo, le equazioni fondamentali sono le seguenti:

$$\text{conservazione della massa} \quad \frac{d}{dx}(uA) = 0 \quad (4.1)$$

$$\text{conservazione della quantità di moto} \quad u \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} - R(A, u)u \quad (4.2)$$

$$\text{elasticità (tube law)} \quad p - p_e = P(A) \quad (4.3)$$

dove la funzione  $P(A)$  nella (4.3) rappresenta la tube law di fig.1.1.

Nella (4.2)  $Ru$  rappresenta la resistenza viscosa.

Considerando  $p_e$  costante, eliminando  $p$  da (4.2) e (4.3) troviamo la variazione di  $A$  con la distanza, ovvero

$$\frac{dA}{dx} = \frac{-RuA}{c^2 - u^2} \quad (4.4)$$

dove

$$c^2 = A \frac{dP(A)}{dA}$$

$c$  è la velocità di propagazione delle onde di pressione di piccola ampiezza lungo il tubo.

Supponiamo che in un punto a valle il tubo sia circolare e  $u < c$ . La (4.4) ha in questo caso segno negativo. La portata è  $uA = q$  per un flusso stazionario è costante,  $A$  diminuisce quando  $u$  aumenta, ma a causa della pendenza di  $P(A)$ , anche  $c^2 - u^2$  decresce portando  $dA/dx$  a un valore sempre più negativo.

Se il tubo è abbastanza lungo si giungerà a un punto in cui  $u$  corrisponde a  $c$ , così che  $\frac{dA}{dx} = -\infty$

Da questo stadio, chiamato *choking*, il modello del flusso stazionario non è più valido, non è più possibile un flusso stazionario di portata  $q$ .

Un certo numero di autori (Brower e Scholten, 1975) hanno suggerito che la presenza di un punto in cui la velocità del fluido raggiunge la velocità di propagazione delle onde è il primo meccanismo per l'inizio di comportamenti instabili, cioè delle oscillazioni auto-eccitate.

Ad ogni modo, il modello monodimensionale contenuto nelle (4.1)-(4.3) non è valido in ogni caso, anche senza il *choking*, per descrivere l'esperimento standard in fig.3.8, perché  $dA/dx$  dovrebbe diventare positivo di nuovo presso l'estremità di valle  $x = l$ .

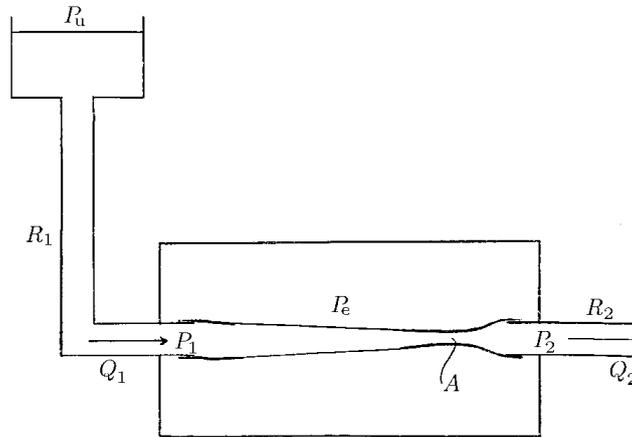


fig.4.1

## 4.2 Il modello di Griffiths, 1971

### 4.2.1 Introduzione e applicazione fisiologica

Si tratta di un modello monodimensionale per il flusso stazionario attraverso un tubo a pareti elastiche che evidenzia l'importanza della velocità delle onde di pressione ed esamina le caratteristiche e la stabilità del flusso subsonico e supersonico.

Il flusso subsonico è sempre stabile, la stabilità per il flusso supersonico è a volte possibile, ma instabilità latenti possono portare a una transizione locale verso un flusso subsonico (questa transizione supersonico-subsonico è nota come salto idraulico) associata alla dissipazione di energia a causa della turbolenza.

Il flusso supersonico può svilupparsi solo con una transizione del flusso a velocità sonica in punti detti strizioni elastiche che controllano le caratteristiche del flusso subsonico a monte e supersonico a valle. Tra due strizioni soniche successive deve esserci un salto idraulico, la cui posizione è controllata dalle strizioni.

La forma dell'uretra maschile durante la minzione suggerisce che ci siano due strizioni elastiche soniche, una nella zona ad alta pressione vicino al raccordo tra uretra membranosa e uretra prostatica e la seconda verso il passaggio esterno (fig.4.2). La prima controlla la portata e la seconda le caratteristiche del flusso oltre il passaggio esterno. Le proprietà dell'uretra cavernosa che si trova tra le due strizioni, non ha normalmente effetti né sulla portata né sul flusso in uscita.

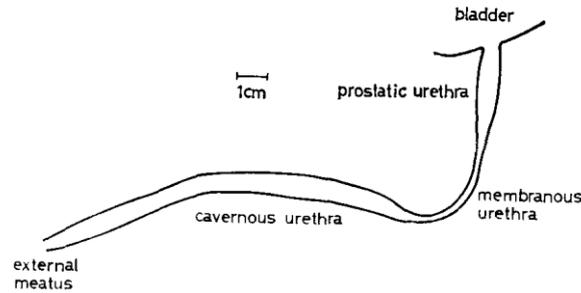


fig.4.2

## 4.2.2 Ipotesi del modello

Assumiamo che il fluido sia incompressibile e il flusso stazionario. Il flusso è considerato unidimensionale.

La sezione trasversale è descritta da un raggio  $r$  dove  $\pi r^2$  è l'area della sezione, si trascurano scostamenti da una sezione circolare e scostamenti assiali delle pareti. In questo caso eventuali tensioni assiali influiscono in modo irrilevante sulla pressione  $P$  all'interno del tubo, che dipenderà solo dal valore locale del raggio  $r$ .

Le proprietà elastiche sono interamente descritte dalla funzione  $P(r)$  che può variare lentamente da punto a punto.

La velocità di propagazione delle onde in un tubo circolare di fluido con densità  $\rho$  è.

$$c = \left[ \left( \frac{r}{2\rho} \right) \frac{dp}{dr} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.1)$$

## 4.2.3 Relazione portata-p pressione

L'analisi si basa sull'equazione di Bernoulli

$$P_0 = P(r) - \rho gh + \frac{1}{2} \rho u^2$$

qui  $P_0$ , il valore locale della pressione d'arresto o carico totale, corrisponde al valore della pressione nel serbatoio a meno delle perdite d'attrito tra il serbatoio e il punto considerato.  $P_0$  decresce quindi monotonicamente nella direzione del flusso.

$h$  è la distanza verticale del punto considerato al di sotto del serbatoio,  $g$  l'accelerazione gravitazionale.

La portata è data da

$$Q = \pi r^2 u \quad (4.3)$$

perciò

$$\frac{\rho Q^2}{2\pi} = r^4 [P_0 - P(r) + \rho gh] \quad (4.4)$$

Per un dato valore di  $(P_0 + \rho gh)$ , la portata  $Q$  si annulla sia quando  $r=0$ , sia quando  $r$  è tale per cui  $P(r) = (P_0 + \rho gh)$ .

Tra questi due valori di  $r$ ,  $Q$  raggiunge il massimo quando  $\frac{dQ^2}{dr} = 0$ , che si verifica quando

$$u^2 = \left(\frac{r}{2\rho}\right) \frac{dP}{dr} = c^2 \quad (4.5)$$

la portata massima risulta:

$$Q_{max} = \pi r^2 \left[ \left(\frac{r}{2\rho}\right) \frac{dP}{dr} \right]^{1/2}$$

l'equazione (4.5) mostra che per un dato valore di pressione d'arresto locale, la portata è massima quando il flusso è sonico. Quando  $Q$  è inferiore al suo valore massimo la velocità del flusso può essere sia subsonica sia supersonica.

#### 4.2.4 Stabilità del flusso

##### Effetto delle perdite d'attrito

Consideriamo il flusso attraverso un tubo elastico uniforme, orizzontale, dove  $P(r)$  e  $\rho gh$  sono indipendenti dalla posizione. Sia  $x$  la distanza longitudinale in direzione del flusso. Di conseguenza  $\frac{dP_0}{dx}$  è negativo.

Differenziando la (4.4) rispetto a  $x$ , per un dato valore di portata e usando la (4.1) e la (4.3):

$$\frac{dr}{dx} = \frac{r}{2\rho(c^2 - u^2)} \frac{dP_0}{dx}$$

perciò nel flusso subsonico il raggio decresce e la velocità cresce in direzione del flusso, mentre per il flusso supersonico si verifica il contrario.

Nel flusso subsonico le perdite di energia causano la diminuzione di pressione in direzione del flusso, situazione stabile analoga a quanto avviene nei tubi rigidi.

Nel flusso supersonico, invece, le perdite di energia apparentemente causano l'aumento di pressione lungo il flusso, un tale gradiente di pressione avverso porta a un'instabilità del fluido nello strato limite alle pareti del tubo. Le turbolenze risultanti aumentano a loro volta il gradiente di pressione avverso, alimentando l'instabilità.

### Effetti di non uniformità del tubo

All'interno di un tubo non uniforme come l'uretra la pressione  $P$  dipende non solo dal raggio locale  $r$  ma anche dalla distanza  $x$  misurata in direzione del flusso. Questa non uniformità del tubo può convenientemente essere divisa in tre categorie:

- (1) tubo elastico convergente nel quale la pressione a raggio costante aumenta in direzione del flusso,  $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_r > 0$
- (2) tubo elastico debolmente divergente nel quale la pressione a raggio costante decresce in direzione del flusso ma meno velocemente della pressione d'arresto,  $\frac{dP_0}{dx} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_r < 0 <$
- (3) tubo elastico fortemente divergente nel quale la pressione a raggio costante decresce in direzione del flusso più velocemente della pressione d'arresto.  $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_r < \frac{dP_0}{dx} < 0$

La stabilità del flusso può essere esaminata calcolando il gradiente di pressione  $\frac{dP}{dx}$ , poichè, come abbiamo visto, il regime supersonico è instabile se questo è positivo. Se  $\frac{dP}{dx}$  diventa positivo in regime subsonico, si verificheranno instabilità di strato limite e perdite di energia aggiuntive (spesso chiamate perdite di espansione), ma il regime subsonico in sé non è instabile dato che le perdite di espansione riducono piuttosto che rafforzare il gradiente di pressione avverso.

Differenziando la (4.4) per  $x$  e assumendo per semplicità che il tubo sia orizzontale

$$\frac{dr}{dx} = \frac{r}{2\rho(u^2 - c^2)} \left[ \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) - \frac{dP_0}{dx} \right] \quad (4.5)$$

cioè

$$\frac{dP}{dx} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = \frac{dP_0}{dx} - \frac{u^2}{c^2} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \quad (4.6)$$

Esaminando le (4.5), (4.6), i comportamenti nelle categorie (1), (2) e (3) che sono riassunti nella tabella 1 sono i seguenti:

Table 1. Types of flow in non-uniform elastic-walled tubes

Type of flow	Type of elastic-walled tube					
	(i) Converging		(ii) Weakly diverging		(iii) Strongly diverging	
Subsonic, $v/c \ll 1$	-	--	-	--	-	+
Subsonic, $v/c \lesssim 1$	-	-	-	-	+	+
Supersonic, $v/c \gtrsim 1$		U		U	-	-
Supersonic, $v/c \gg 1$		U	-	+	-	-

In each compartment the first symbol (+ or -) shows the sign of  $dP/dx$  and the second the sign of  $dr/dx$ . The symbol U shows that the flow regime is unstable.

- In un tubo convergente o debolmente divergente il regime subsonico è principalmente quello stabile con pressione e raggio entrambi decrescenti in direzione del flusso.
- In un flusso supersonico che potrebbe essere osservato in un tubo debolmente divergente per alti valori di  $\frac{u}{c}$ , la pressione scende ma il raggio aumenta nella direzione del flusso.
- In un tubo collassabile fortemente divergente il regime supersonico è stabile, sia pressione sia raggio diminuiscono nella direzione del flusso. Anche il flusso subsonico è stabile con il raggio sempre decrescente in direzione del flusso. Per bassi valori di  $\frac{u}{c}$  la pressione scende in direzione del flusso, ma per valori sufficientemente vicini all'unità nasce un gradiente di pressione avverso che causa perdite di espansione.

### Il salto idraulico

In un tubo fortemente divergente il flusso supersonico è stabile. E' tuttavia possibile un'interruzione di questa stabilità. Immaginando che il tubo si riallarghi rapidamente in un punto con conseguente rapido aumento della pressione, sull'apertura ci saranno perdite di energia aggiuntive associate con le instabilità di strato limite e le turbolenze che si auto-alimentano per quanto già descritto.

Il criterio di stabilità indicato in tabella 1 risulta quindi violato e a valle dell'apertura ci aspettiamo di trovare un flusso subsonico stabile.

Nel salto alcune assunzioni del flusso unidimensionale risultano irrealistiche (per esempio l'aver trascurato le tensioni longitudinali) e in pratica il salto non è localizzato a un punto ma occupa una porzione finita di tubo.

### 4.2.5 Il flusso vicino a una strizione elastica

Consideriamo un tubo elastico che prima converge  $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_r > 0$  e poi diverge  $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_r < 0$ .

Chiamiamo strizione elastica il punto in cui  $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_r = 0$ , e  $P(r,x)$  ha il suo massimo valore a raggio costante.

A monte della strizione elastica solo il flusso subsonico è stabile e la portata  $Q$  è minore del valore massimo  $Q_{max}$  in ciascun punto. A valle sono possibili entrambi i regimi. Dato che un salto improvviso da subsonico a supersonico non è possibile, il flusso supersonico può essere ottenuto solo passando per la velocità sonica. Abbiamo due possibili comportamenti:

- (1) alla strizione la portata  $Q$  è inferiore alla portata massima  $Q_{max}$ . La velocità non diventa mai sonica e la transizione al regime supersonico non è dunque possibile, il flusso rimane subsonico anche a valle della strizione.
- (2)  $Q=Q_{max}$  alla strizione. La velocità del flusso è sonica nella strizione e il regime supersonico a valle di questa è dunque possibile.

Considerando le perdite d'attrito, la tabella 1 mostra che il flusso supersonico per bassi valori di  $\frac{u}{c}$  diventa possibile quando

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_r - \frac{dP_0}{dx} = 0$$

ovvero la strizione elastica si ha per il valore massimo di  $[P(r,x) - P_0(x)]$

## 4.3 Verso un'integrazione dei due modelli

### 4.3.1 Il modello di Cancelli e Pedley, 1985

Questo modello monodimensionale unisce gli effetti della propagazione delle onde di pressione con i più importanti aspetti dei modelli a parametri concentrati.

Il modello di Cancelli e Pedley include inoltre due nuovi aspetti fondamentali nella previsione del comportamento oscillatorio: il primo è l'inclusione della tensione longitudinale nella descrizione delle proprietà elastiche del tubo; il secondo è un metodo compatibile con le equazioni per un flusso monodimensionale per descrivere la dissipazione di energia nella separazione del flusso.

Occorre però precisare che, nonostante le innovazioni apportate, il seguente modello rimane qualitativo: quindi è più che altro utile a evidenziare i principali fenomeni fisici coinvolti piuttosto che a fornire una simulazione precisa.

### 4.3.1 Impostazione del modello

Il modello presenta delle equazioni alle derivate parziali, caratteristica dei modelli monodimensionali.

Equazione di continuità

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial u \alpha}{\partial x} = 0$$

dove  $x$  misura la distanza assiale lungo il tubo,  $t$  il tempo,  $\alpha(x,t)$  l'area di sezione del tubo e  $u(x,t)$  la velocità assiale media sulla sezione.

Conservazione della quantità di moto

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} - F$$

dove  $\rho$  è la densità del fluido,  $p(x,t)$  è la pressione (sull'asse del tubo). Il termine  $F$  è positivo, funzione di  $u$  e  $\alpha$  e rappresenta sia la dissipazione viscosa (ovvero le perdite distribuite) che le perdite quasi-stazionarie che si verificano nella regione di separazione del flusso.

Nel caso di formazione di un getto, il termine  $F$  viene espresso come:

$$F = (\chi - 1) \rho u \frac{\partial u}{\partial x}$$

In cui  $\chi$  è un coefficiente compreso tra 0 e 1; in particolare, se il flusso è completamente aderente alle pareti del condotto si ha  $\chi=1$ , se il flusso invece presenta una separazione  $0 < \chi < 1$  e  $\frac{du}{dx} < 0$ .

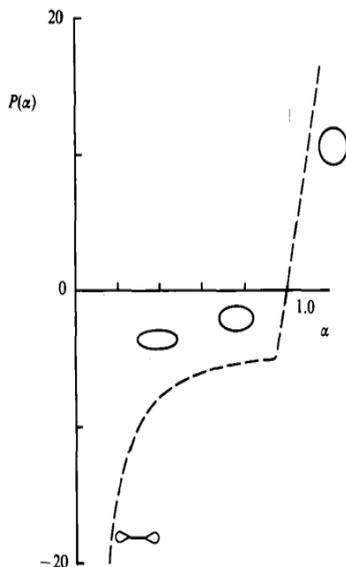


fig.4.3

La relazione costitutiva e la tensione longitudinale:

$$p - p_e = P(\alpha) - T \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}$$

La relazione costitutiva  $P(\alpha)$  è una funzione non lineare e caratterizza la grande variazione di cedevolezza del tubo nel passaggio dall'essere disteso ( $p > p_e$ ) a collassato ( $p < p_e$ ).

La relazione costitutiva scelta da Cancelli e Pedley, graficata con linea tratteggiata a sinistra, è la seguente:

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= 1 - \alpha^{-1,5} && \text{per } \alpha \leq 1 \\ P(\alpha) &= k(\alpha - 1) && \text{per } \alpha > 1 \end{aligned}$$

In cui  $k$  è una costante assunta pari a 100.

In questo modello la relazione costitutiva è accompagnata dal termine  $T \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}$ : questo termine approssima gli effetti di una tensione longitudinale costante  $T$ , dove  $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}$  indica la curvatura longitudinale della parete del tubo.

In successivi modelli, l'equazione può contenere altri termini, per esempio rappresentanti la rigidità a flessione e/o l'inerzia della parete.

### 4.3.2 Gli aspetti considerati dal modello

Questo modello include quindi i seguenti fondamentali aspetti del flusso in un tubo collassabile:

- Tiene conto della **dissipazione di energia** associata con il getto che si genera ad alti numeri di Reynolds subito a valle della strizione. Questa dissipazione si rivela necessaria al rilevamento di oscillazioni auto-eccitate nei modelli a parametri concentrati come quello di Pedley (1980);
- Descrive l'influenza dei **tubi rigidi** a monte e a valle del segmento collassabile: dal punto di vista sperimentale è stato infatti dimostrato che questi influenzano significativamente il comportamento non stazionario. Questo aspetto è considerato nei modelli a parametri concentrati.
- Essendo un modello monodimensionale, esso considera la **propagazione delle onde**. Il coinvolgimento di questo fenomeno è stato dimostrato dagli esperimenti. Gli studi sperimentali hanno dimostrato che l'instabilità si verifica non appena il flusso diventa sonico alla strizione ("*choked flow*"): esisterebbe quindi una relazione tra la perdita di stazionarietà del flusso e il superamento, in un certo punto del tubo, della velocità delle onde di pressione nelle pareti del condotto da parte della velocità del fluido.
- Considera la **tensione longitudinale** a cui è sottoposto il tubo elastico.

# Capitolo 5: Le applicazioni biologiche

Le interazioni fluido-struttura svolgono un ruolo importante in una grande varietà di fenomeni fisiologici nel corpo umano che coinvolgono soprattutto il sistema cardiovascolare e quello respiratorio. In particolare sono tubi collassabili le vene e alcune parti delle vie respiratorie, dato che la pressione del fluido che scorre attraverso il sistema è dello stesso ordine di grandezza della pressione all'esterno di esso.

Quasi tutti i vasi trasportanti fluidi all'interno del corpo sono flessibili e la deformazione delle pareti del vaso è spesso indice della sua funzione biologica o di un'eventuale disfunzione.

## 5.1 Il sistema cardiovascolare

Il sistema cardiovascolare presenta abbondanti esempi di interazioni fluido-struttura.

La propagazione dell'impulso nelle arterie è fondamentale per il trasporto del sangue dal cuore a organi e tessuti.

In condizioni normali le arterie sono soggette a una pressione trasmurale tale da rimanere rigide e distese, con sforzi a parete trascurabili. Eccezioni importanti sono le arterie coronarie, inserite nella parete muscolare del cuore, che possono restringersi significativamente quando il cuore si contrae e l'arteria brachiale che può esser compressa dal manicotto gonfiato dello sfigmomanometro intorno al braccio durante la misurazione della pressione sanguigna.

In questo caso le instabilità indotte dal flusso generano i "toni di Korotkoff", utili per la determinazione della pressione arteriosa sistolica e diastolica.

Le vene lavorano a pressioni trasmurali molto più basse di quelle delle arterie e di conseguenza le variazioni nella pressione idrostatica possono essere sufficienti a indurre il collasso. Le vene al di sopra del cuore ad eccezione di quelle nel cranio sono perciò normalmente collassate.

La flessibilità delle pareti venose è anche responsabile del ritorno venoso per riportare il sangue al cuore, favorito dal movimento peristaltico dei muscoli che comprimono ritmicamente le pareti dei vasi. In terapia la compressione ritmica delle vene delle gambe è utilizzata per ridurre i rischi di trombosi venosa profonda.

### **5.2.1 Autoregolazione del flusso sanguigno**

Si tratta di un fenomeno presente in diversi organi tra i quali il cuore, il cervello e i reni in cui l'organo regola autonomamente il flusso aumentando la resistenza verso di esso, in modo da mantenere la portata sanguigna costante.

Un modello realizzato da Rodbard (1963) si basa sui principi del flusso attraverso i tubi collassabili. Il modello consiste in un sistema in cui il fluido scorre da un serbatoio a un tubo collassabile montato tra due tubi rigidi a sezione circolare. Il segmento collassabile è racchiuso da una camera la cui pressione è controllata fondamentalmente dalla pressione subito a monte del tubo deformabile. In questo sistema se la pressione a monte cresce e in modo da aumentare la portata, la pressione nella camera aumenta, portando al collasso del condotto flessibile e aumentando quindi la resistenza al flusso.

## **5.2 Il sistema respiratorio**

Anche le vie respiratorie sono in parte collassabili e le interazioni fluido-struttura svolgono un ruolo importante in diverse condizioni polmonari. La limitazione di portata durante l'espirazione è uno dei più significativi: un incremento nello sforzo durante l'espirazione forzata, a un dato volume polmonare può non portare a un aumento del flusso di aria espirata e anzi a diminuirlo. Durante l'espirazione forzata, infatti, la contrazione del diaframma ha due conseguenze: primo, aumenta la pressione alveolare, fornendo un gradiente di pressione tra alveoli e bocca per far sì che l'aria venga emessa dai polmoni e secondo, aumenta la pressione dei tessuti esterna ai condotti. Questo porta le vie respiratorie a un parziale collasso che può inibire il flusso espiratorio.

La limitazione di portata è anche coinvolta nei cambi di postura come meccanismo regolatorio. Un tipico esempio è costituito dalla giugulare della giraffa che porta in alto la testa dopo aver bevuto. Poiché la pressione all'interno della giugulare aumenta con l'altezza (invece di decrescere idrostaticamente) si deduce che deve essere fortemente collassata in modo da opporre una resistenza viscosa e impedire un rapido svuotamento della stessa.

Disfunzioni nell'inspirazione sono la causa di instabilità che generano il russare e nei casi più gravi un'ostruzione delle vie respiratorie superiori come nella sindrome delle apnee del sonno.

Una forma più controllata di emissione di rumori avviene nella laringe, dove le oscillazioni delle corde vocali sono all'origine della capacità di parlare.

## Conclusioni

Un flusso che attraversa un tubo deformabile costituisce un complesso sistema dove le interazioni tra le forze meccaniche e fluidodinamiche portano a fenomeni di varia natura.

I modelli analitici sono semplificazioni basate su alcune assunzioni e si propongono di fornire una comprensione teorica di alcuni fenomeni riscontrati negli esperimenti: solo nella zona a resistenza negativa della curva  $\Delta p-Q$ , caratterizzata da una forte instabilità, si possono verificare oscillazioni auto-eccitate indotte dal flusso. La causa di tali oscillazioni non è ancora chiara ma tramite esperimenti e i conseguenti modelli analitici, si è imputata l'origine delle oscillazioni alla propagazione delle onde (Griffith, 1971) o alla dissipazione di energia dovuta alla separazione del flusso alla strizione (Bertram e Pedley, 1982; Cancelli e Pedley, 1986).

Anche per la limitazione di portata, altro fenomeno caratteristico, le cause non sono del tutto chiarite. È presumibile che i meccanismi scatenanti siano legati al superamento della velocità di propagazione delle onde di pressione alla strizione e/o all'incremento di resistenza dovuta al collasso.

Una maggior comprensione analitica di questi fenomeni, alla base di una grande varietà di interazioni fluido-struttura nell'ambito della fisiologia rende possibile prevedere funzioni e disfunzioni in vari sistemi del corpo umano.

## Indice delle immagini

**fig.1.1, fig.1.2** da: GROTBORG, J. B. & JENSEN, O. E. 2004 Biofluid mechanics in flexible tubes. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2004. 36, pag.124.

**fig.1.3, fig.1.4, fig.1.5, fig 1.6, fig.1.8** da: PEDLEY, T. J. 1980 The fluid mechanics of large blood vessels. Cambridge University Press., Chapter 6.

**fig.1.7** da: KATZ, A. I., CHEN, Y. & MORENO, A. H. 1969 Flow through a collapsible tube: experimental analysis and mathematical model. *Biophys. J.* 9, pag.1265.

**fig.1.9** da: PEDLEY, T. J. & LUO, X. Y. 1998 Modelling flows and oscillations in collapsible tubes. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics* 10, pag.281.

**fig.3.1, fig.3.2** da: PEDLEY, T. J. 1980 The fluid mechanics of large blood vessels. Cambridge University Press., Chapter 6.

**fig.3.3** da: BERTRAM, C. D. & PEDLEY, T. J. 1982 A mathematical flow of unsteady collapsible tube behaviour. *J. Biomech.* 15, pag.42.

**fig.3.4, fig.3.5, fig.3.6, fig.3.7** da: PEDLEY, T. J. 1980 The fluid mechanics of large blood vessels. Cambridge University Press., Chapter 6.

**fig.4.1** da: PEDLEY, T. J. & LUO, X. Y. 1998 Modelling flows and oscillations in collapsible tubes. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics* 10, pag.279.

**fig.4.2** da: GRIFFITHS, D. J. 1971 Hydrodynamics of male micturition-I: theory of steady flow through elastic walled tubes. *Med. & biol. Engng.* 9, pag.586.

**fig.4.3** da: CANCELLI, C. & PEDLEY, T. J. 1985 A separated flow-model for collapsible tube oscillations. *J. Fluid Mech.* 157, pag.378.

## **Bibliografia**

- BERTRAM, C. D. & PEDLEY, T. J. 1982 A mathematical flow of unsteady collapsible tube behaviour. *J. Biomech.* 15, pp. 39-50.
- BERTRAM, C. D. & GAVER, D. P. 2005 Biofluid mechanics of the pulmonary system. *Ann. of Biomed. Engng.* 33, pp. 1681-1688.
- CANCELLI, C. & PEDLEY, T. J. 1985 A separated flow-model for collapsible tube oscillations. *J. Fluid Mech.* 157, pp. 375-404.
- CANCELLI, C. & CHIOCCHIA, G. 1979 On the onset of self-excited oscillations in a collapsible tube flow with sonic less than one: mathematical model and numerical results. *Atti d. Acc. Naz. dei Lincei, Memorie Sc. Fisiche, sez. I*, 15, pp. 317-352.
- ELAD, D., KAMM, R. D. & SHAPIRO, A. H. 1987 Choking phenomena in a lung-like model. *Trans. ASME: J. Biomech. Engng.* 109, pp. 1-9.
- GRIFFITHS, D. J. 1971 Hydrodynamics of male micturition-I: theory of steady flow through elastic walled tubes. *Med. & biol. Engng.* 9, pp. 581-588.
- GROTBERG, J. B. & JENSEN, O. E. 2004 Biofluid mechanics in flexible tubes. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2004. 36, pp. 121-147.
- GROTBERG, J. B. 2001 Respiratory fluid mechanics and transport processes. *Annu. Rev. Biomed. Eng.* 2001. 3, pp. 421-457.
- HEIL, M. & HAZEL, A. L. 2011 Fluid-structure interaction in internal physiological flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2011. 43, pp. 141-162.
- KATZ, A. I., CHEN, Y. & MORENO, A. H. 1969 Flow through a collapsible tube: experimental analysis and mathematical model. *Biophys. J.* 9, pp. 1261-1279
- PEDLEY, T. J. & LUO, X. Y. 1998 Modelling flows and oscillations in collapsible tubes. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics* 10, pp. 277-294.
- PEDLEY, T. J. 1980 *The fluid mechanics of large blood vessels.* Cambridge University Press.
- RODBARD, S. 1963 Autoregulation in encapsulated, passive, soft walled vessels. *Am. Heart J.*, 65, pp. 648-655.
- SHAPIRO, A. H. 1977 A steady flow in collapsible tubes. *Trans. ASME: J. Biomech. Engng.* 99, pp. 126-147.
- WIDMEIER, E. P., RAFF, H. & STRANG, K. T. *Vander Fisiologia*, XII edizione. Casa Editrice Ambrosiana.