

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Triennale in
Ingegneria Aerospaziale



Tesi di Laurea Triennale

Metodi level-set per applicazioni fluidodinamiche

Relatori:

Prof.ssa Stefania
SCARSOGLIO

Dott. Matteo FOIS

Candidata:

Rita NUNZIATA

Dicembre 2022

Sommario

Introduzione	3
Descrizione del moto fluido	5
2.1 Descrizione euleriana e lagrangiana	5
2.2 Equazioni di Navier-Stokes	6
2.2.1 Conservazione della massa	7
2.2.2 Conservazione della quantità di moto	8
2.2.3 Conservazione dell'energia	9
2.3 Equazioni di Navier-Stokes per flussi incompressibili	10
2.4 Condizioni al contorno e iniziali	11
Metodi level-set	13
3.1 Descrizione teorica	14
3.2 Condizioni all'interfaccia	16
3.3 Reinizializzazione	17
3.4 Modellazione della tensione superficiale	19
3.5 Accoppiamento equazioni	19
Applicazioni	21
4.1 Dinamica delle bolle	21
4.1.1 Applicazioni 2D	24
4.1.2 Applicazioni 3D	26
4.1.3 Scoppio di una bolla su una superficie libera	29
4.1.4 Coalescenza di due bolle	29
4.1.5 Formazione di bolle da un orifizio	31
4.2 Contrazione di un filamento liquido	32
4.3 Linee di contatto	34
Conclusione	36
Riferimenti bibliografici	38

Capitolo 1

Introduzione

Data un'interfaccia (ovvero una superficie di separazione che delimita il contorno di due differenti fasi di un sistema) che separi due regioni dello spazio all'interno di un campo di velocità, diventa necessario essere in grado di calcolare in modo efficiente l'evoluzione della stessa e dello spazio che la circonda. Lo sviluppo di metodi efficienti studiare per l'evoluzione di interfacce è una delle sfide più urgenti dell'ingegneria degli ultimi decenni, in quanto trova applicazione nei campi più disparati: dall'immagine processing alla scienza dei materiali, dal nucleare all'health science [1,2]. Per i flussi multifase, ovvero flussi di materiale composto da due o più fasi a contatto, tale analisi diventa fondamentale per qualsiasi studio o simulazione che li coinvolga, per conoscere le proprietà delle due fasi e come queste si evolvono dinamicamente e vicendevolmente.

In generale si possono distinguere due approcci per modellare il moto delle interfacce [3]: il diffuse-interface method e lo sharp-interface method. Il primo prevede una rappresentazione dell'interfaccia come una regione artificiale di spessore limitato, dove la transizione da una fase all'altra è regolare. Ciò implica che le proprietà del materiale, come viscosità e densità, siano rappresentate da una funzione regolare. Si tratta di un approccio concettualmente semplice, su cui si basa il metodo volume-of-fluid [4], ma nella sua applicazione può generare instabilità e risultati non fisici. Nel secondo approccio, invece, l'interfaccia presenta uno spessore infinitesimo; alcuni metodi che ricalcano questo criterio sono il metodo front-tracking [5] (dove l'interfaccia è rappresentata esplicitamente) e il metodo level-set, protagonista di questa trattazione.

Il metodo level-set, introdotto da Osher e Sethian 1988 [6] e poi implementato per i flussi multifase da Sussman et al. 1994 [7], prevede una rappresentazione implicita dell'interfaccia come contorno di un'ipersuperficie φ (figura 1.1). Il metodo si basa sull'utilizzo di una funzione di livello (o level-set, come ad esempio la funzione di distanza con segno) per distinguere i due fluidi a contatto. La funzione assumerà dunque segno positivo in un fluido, negativo nell'altro e valore nullo sull'interfaccia. Il metodo è in grado di gestire grandi deformazioni delle interfacce, restituendo un risultato definito, e di garantire una transizione delle proprietà fisiche regolare attraverso l'interfaccia stessa.

L'evoluzione dell'interfaccia nel dominio è ottenuta risolvendo l'equazione del trasporto per la funzione level-set φ . Tuttavia, man mano che si prosegue con l'algoritmo, la funzione φ cessa di essere una funzione di distanza con segno, e diventa necessario introdurre un processo di reinizializzazione che garantisca il recupero delle proprietà di distanziamento.

Per quanto riguarda i flussi multifase, se ne possono distinguere due tipologie [8]: i flussi dispersi, costituiti da particelle di dimensione finita (come gocce o bolle) immersi in una fase continua; i flussi separati, formati da due o più fluidi a contatto. Nella nostra trattazione presenteremo degli esempi di analisi di applicazione del metodo level-set a entrambi i modelli.

In particolare, nel capitolo 2 si affronterà una trattazione delle equazioni che governano il moto dei fluidi, con particolare attenzione al caso di fluidi incompressibili. Si proseguirà, nel capitolo 3, con una descrizione matematica del metodo level-set, insieme a un modello di formulazione della tensione superficiale per l'interazione tra le fasi. Per concludere, nel capitolo 4 verrà offerta una visione generale dell'applicazione del metodo level-set ai problemi dei flussi multifase, specificatamente ai processi che coinvolgono l'interazione tra bolle e fluidi (figura 1.2).

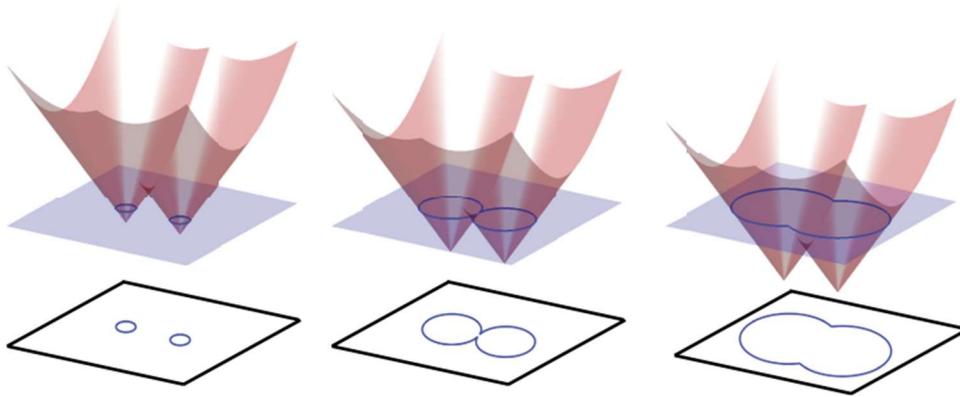


Figura 1.1: Illustrazione del funzionamento del metodo level-set [1].

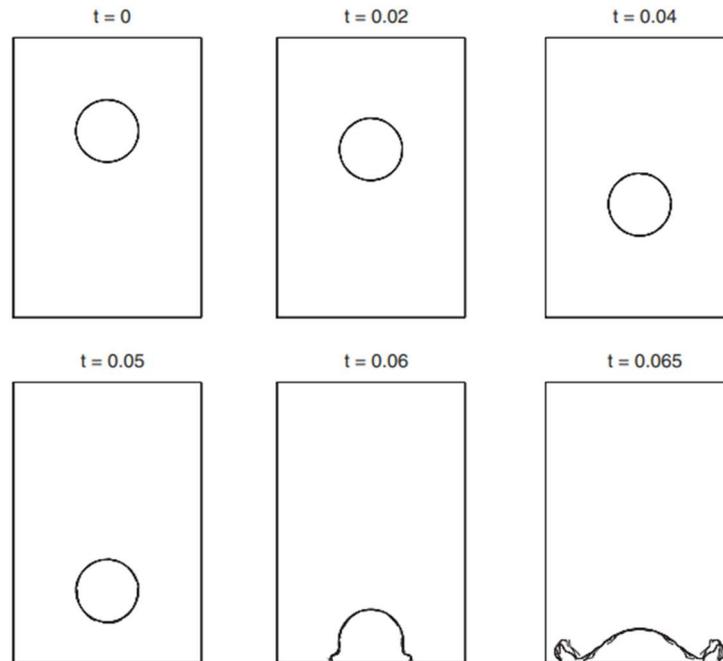


Figura 1.2: Esempio di metodo level-set applicato alla simulazione di una goccia che cade [9].

Capitolo 2

Descrizione del moto fluido

Le proprietà dei fluidi, materiali in grado di scorrere e deformarsi illimitatamente se soggetti ad azioni esterne, possono essere studiate osservando il moto delle singole particelle che li compongono, ovvero guardando alle grandezze microscopiche [10].

Questo metodo però non risulta conveniente nei casi di interesse pratico; si preferisce piuttosto adottare uno studio delle grandezze macroscopiche. A questo proposito conviene descrivere il fluido come un mezzo continuo, costituito da infinite particelle fluide di volume infinitesimo. Affinché questa descrizione sia valida, la particella deve essere sufficientemente estesa da contenere un numero statisticamente significativo di molecole – in modo da poter valutare le grandezze medie sul volume – e allo stesso tempo abbastanza piccola da potere assumere le proprietà medie costanti all'interno di tale volume. Questa interpretazione della materia costituisce la cosiddetta ipotesi del continuo.

Una misura della validità dell'ipotesi del continuo è data dal numero di Knudsen. Sia l il cammino libero medio molecolare, ovvero la distanza media tra due urti consecutivi, e L la grandezza caratteristica del problema studiato; si definisce quindi numero di Knudsen la quantità:

$$Kn = \frac{l}{L} \quad (2.1)$$

Se risulta che $Kn \ll 1$, allora l'ipotesi del continuo è valida.

In conclusione, una particella fluida così caratterizzata può essere equiparata ad un punto e le proprietà termodinamiche del fluido – ad esempio densità, temperatura, pressione – possono essere viste come funzione dello spazio e del tempo. Sia dunque Q una generica variabile termodinamica, $\mathbf{x} = (x, y, z)$ il vettore posizione e t il tempo, allora possiamo scrivere:

$$Q = Q(\mathbf{x}, t)$$

2.1 Descrizione euleriana e lagrangiana

In presenza di un campo di velocità e sotto l'ipotesi del continuo, il moto di un fluido può essere studiato secondo due approcci:

- Descrizione Euleriana o a punto fisso, ovvero si studia l'evoluzione nel tempo della generica proprietà Q nei singoli punti dello spazio occupato del fluido;

- Descrizione Lagrangiana, ovvero si studia l'evoluzione della funzione Q associata a una singola particella, seguendone l'evoluzione lungo la sua traiettoria.

I due approcci sono diversi – il primo analizza l'evoluzione temporale delle grandezze fluidodinamiche, il secondo l'evoluzione di ogni singola particella – ma sono legati, ed è possibile definire una relazione tra loro [10]. Introduciamo quindi la definizione di derivata materiale o lagrangiana per una generica variabile fluidodinamica $Q = Q(x(t), y(t), z(t), t)$, ottenuta con la regola della catena:

$$\frac{DQ}{Dt} = \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (2.2)$$

Ricordando la definizione di operatore nabla:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Riconosciamo nella (2.2) le componenti di ∇Q e le componenti del vettore velocità $\mathbf{V} = \left(u = \frac{dx}{dt}, v = \frac{dy}{dt}, w = \frac{dz}{dt} \right)$; quindi riscriviamo:

$$\frac{DQ}{Dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla Q \quad (2.3)$$

Il primo termine $\partial Q / \partial t$ rappresenta la variazione di Q a punto fisso, ed è detto derivata locale o euleriana; nel caso in cui sia nullo si ha la condizione di stazionarietà, ovvero la grandezza Q non varia nel tempo. Il secondo termine $\mathbf{V} \cdot \nabla Q$ è la derivata convettiva, ovvero la variazione dovuta al moto fluido; se è nullo si ha la condizione di uniformità, vale a dire un campo per cui Q ha lo stesso valore in tutti i punti.

2.2 Equazioni di Navier-Stokes

Proseguiamo ricavando le equazioni di governo del moto fluido, che si ottengono applicando i seguenti principi:

- Conservazione della massa, secondo cui questa può variare nel tempo solo a causa di flussi di massa attraverso la superficie di un volume di controllo fissato;
- Conservazione della quantità di moto, ovvero una formulazione generalizzata della seconda legge della dinamica;
- Conservazione dell'energia, una forma generalizzata per il primo principio della termodinamica.

Tali equazioni, note comunemente come equazioni di Navier-Stokes, possono essere ricavate e scritte in modi diversi; qui saranno presentate prima nella forma integrale e poi in quella differenziale [10].

2.2.1 Conservazione della massa

Iniziamo dall'equazione di bilancio della massa, nella sua forma integrale ed euleriana, riferita alla massa di fluido per unità di volume contenuta in un volume di controllo fissato \mathcal{V} , che non varia nel tempo e non si muove con il fluido, ma che è soggetto ad un flusso di massa attraverso la sua superficie $\mathcal{S} = \partial\mathcal{V}$:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{S}} \rho (\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}) d\mathcal{S} \quad (2.4)$$

dove il simbolo ρ indica la densità, mentre $\hat{\mathbf{n}}$ rappresenta il versore normale alla superficie \mathcal{S} , considerato positivo se diretto verso l'esterno; il segno è negativo di modo che risultino convenzionalmente positivi i flussi entranti nel volume di controllo.

Passiamo ora alla derivazione della forma differenziale, a partire da quella integrale. Sfruttiamo, dall'analisi, il teorema di Gauss o della divergenza, per cui, dato un campo vettoriale \mathbf{A} e un volume di controllo \mathcal{V} , vale:

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{A} d\mathcal{V}$$

Da cui:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V}$$

Sfruttando la linearità, scambiamo gli operatori derivata e integrale di volume:

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{d\rho}{dt} d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V}$$

A questo punto riarrangiamo l'equazione, portando entrambi i termini sotto il medesimo integrale:

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right) d\mathcal{V} = 0$$

L'equazione risulta essere soddisfatta solo se la funzione integranda è uguale a 0:

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2.5)$$

La 2.5 rappresenta l'equazione di continuità scritta in forma differenziale.

L'equazione di bilancio della massa si può scrivere anche in forma lagrangiana, facendo comparire la derivata materiale:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho$$

Sostituendo nella 2.5 si ottiene:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.6)$$

2.2.2 Conservazione della quantità di moto

Proseguiamo con l'equazione di bilancio della quantità di moto. L'intuizione fisica da cui deriva tale equazione non è altro che la seconda legge della dinamica di Newton, per cui la risultante delle forze esterne è uguale alla variazione nel tempo della quantità di moto:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{V}) = \mathbf{F}$$

La formulazione integrale ed euleriana per l'equazione della quantità di moto è la seguente:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{V} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}) d\mathcal{S} \quad (2.7)$$

A differenza dell'equazione di bilancio della massa, quella della quantità di moto è un'equazione vettoriale, ovvero include tre equazioni, una per ogni direzione (x, y, z) .

Al secondo membro della (2.7) compaiono tutte le forze che agiscono sul volume \mathcal{V} (distinte in forze di volume \mathbf{f} e di superficie $\boldsymbol{\sigma}$) e anche il flusso di quantità di moto attraverso la superficie, descritto dall'unico termine non lineare dell'equazione. Anche in questo caso, il vettore $\hat{\mathbf{n}}$ è quello normale uscente alla superficie \mathcal{S} , e i termini sono presi con segno negativo di modo che il flusso risulti positivo se entrante nel volume di controllo.

Nell'equazione (2.7) compare il tensore degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}$, che comprende sforzi normali e tangenziali. In particolare, il tensore può essere diviso in due contributi, una parte isotropa $-p\mathbf{I}$ e una non isotropa $\boldsymbol{\tau}$, detta tensore degli sforzi viscosi:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.8)$$

dove p è la pressione statica, ed è definita come la media degli sforzi normali che compaiono nel tensore degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}$:

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad (2.9)$$

Mentre gli sforzi viscosi sono definiti come:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (2.10)$$

dove μ è la viscosità dinamica (ovvero la misura della resistenza del fluido all'applicazione di uno sforzo tangenziale), mentre il simbolo δ_{ij} indica la funzione delta di Kronecker, che vale 1 se $i = j$, altrimenti vale 0. Nei casi di nostro interesse vale l'ipotesi di Stokes, per cui la traccia del tensore $\boldsymbol{\tau}$ è nulla e il coefficiente λ è assunto uguale a $-\frac{2}{3}\mu$.

Come fatto per l'equazione di bilancio della massa, applichiamo il teorema della divergenza all'integrale di superficie. Raccogliamo tutti i termini risultanti sotto lo stesso integrale e, poiché l'equazione risulta soddisfatta solo se la funzione integranda è uguale a 0, otteniamo l'equazione di bilancio della quantità di moto in forma differenziale, esplicitando anche l'espressione di $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{V}) = -\nabla \cdot ((\rho \mathbf{V}) \mathbf{V}) - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} \quad (2.11)$$

La stessa equazione può essere riscritta in forma lagrangiana come:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} \quad (2.12)$$

2.2.3 Conservazione dell'energia

Infine, passiamo all'equazione di bilancio dell'energia totale del fluido E , data dalla somma dell'energia interna per unità di massa e e dell'energia cinetica per unità di massa $\frac{1}{2}\mathbf{V}^2$:

$$E = e + \frac{1}{2}\mathbf{V}^2 = c_v T + \frac{1}{2}\mathbf{V}^2$$

dove c_v è il calore specifico a volume costante, mentre T indica la temperatura assoluta.

L'equazione di bilancio, nella sua forma integrale ed euleriana, è la seguente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho E d\mathcal{V} = & - \int_S \rho E \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\mathcal{S} - \int_S p \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\mathcal{S} + \int_S (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V}) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{V}} \rho Q_v d\mathcal{V} + \\ & - \int_S \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\mathcal{S} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Al secondo membro compaiono, in ordine:

- Il flusso di energia attraverso la superficie del volume di controllo;
- I due termini che indicano il lavoro compiuto dalle forze di superficie;
- Il termine dovuto alle fonti di calore interne al volume di controllo;
- Il calore scambiato con l'esterno, che può essere espresso attraverso la nota legge di Fourier, per cui $\mathbf{q} = -k\nabla T$, dove per k si intende il coefficiente di conducibilità termica.

Per derivare la corrispondente forma differenziale, applichiamo nuovamente il teorema della divergenza a tutti gli integrali di superficie, raccogliamo tutti i termini sotto lo stesso integrale di volume e otteniamo l'equazione di bilancio dell'energia totale in forma differenziale:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{V}) = -\nabla \cdot (p \mathbf{V}) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V}) + \rho Q_v - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (2.14)$$

In conclusione, riepiloghiamo le equazioni di Navier-Stokes in coordinate cartesiane, utilizzando la notazione indiciale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad (2.15)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] + \rho f_i \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial E}{\partial t} + u_i \frac{\partial E}{\partial x_i} \right) = \\ = - \frac{\partial}{\partial x_i} (p u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] u_i \right\} + \\ + \rho f_i u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + Q_v \end{aligned} \quad (2.17)$$

Una volta ricavate le equazioni, è possibile calcolare tutte le variabili in gioco: il campo vettoriale \mathbf{V} , le variabili scalari ρ ed E , e le restanti grandezze termodinamiche, grazie a relazioni addizionali che descrivono il fluido in esame.

2.3 Equazioni di Navier-Stokes per flussi incompressibili

In questa sezione presentiamo una forma delle equazioni di Navier-Stokes – prima ottenute nella loro formulazione generica – ricavata applicando l’ipotesi di incompressibilità per i fluidi [10], in quanto nella nostra trattazione affronteremo in particolare problemi con fluidi incompressibili. A questo proposito, da questo momento trascureremo l’equazione di bilancio dell’energia totale, poiché disaccoppiata dalle altre e non necessaria alla nostra trattazione. Quella di incompressibilità è una condizione di stato che esprime che la densità del fluido non dipende da altri parametri macroscopici del fluido stesso ed è verificata, con buona approssimazione, nei liquidi.

Assumendo il fluido come incompressibile, ovvero $\rho = \text{costante}$, ci riferiamo a variazioni nello spazio e nel tempo; ciò implica che ogni derivata spaziale e temporale della densità si annullerà sotto questa condizione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \rho &= 0 \end{aligned}$$

A partire da questa ipotesi, le equazioni di governo si modificano notevolmente.

Partiamo dall’equazione di continuità, nella sua forma differenziale (2.6), che diventa:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.18)$$

Ne consegue che per un flusso incompressibile, la divergenza del vettore velocità è nulla. Questo risultato definisce la condizione di incompressibilità.

Per quanto riguarda l'equazione di bilancio della quantità di moto (2.11), applicando il risultato appena ottenuto e semplificando la scrittura del termine viscoso, otteniamo:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (2.19)$$

dove compare il coefficiente $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, detto viscosità cinematica.

Il termine $\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$ non lineare è noto come termine convettivo, mentre il contributo dato dal termine viscoso $\nu \nabla^2 \mathbf{V}$ è diffusivo.

2.4 Condizioni al contorno e iniziali

Le equazioni di Navier-Stokes per flussi incompressibili formano un sistema di equazioni alle derivate parziali non lineari, principalmente a causa del termine convettivo nell'equazione di bilancio della quantità di moto (2.19) e della dipendenza non lineare dei coefficienti μ e k dalla temperatura. Le equazioni possono essere linearizzate solo in particolari casi, nei quali è poi possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti e risolvere il problema analiticamente. Nel caso non lineare, la risoluzione diventa molto più complessa, e nella maggior parte dei casi è necessario ricorrere a tecniche di risoluzione numeriche.

Affinché il problema fluidodinamico sia completamente definito e ben posto, è necessario specificare delle condizioni ausiliarie, che sono le condizioni al contorno (spaziali) e le condizioni iniziali (temporali). Si consideri, ad esempio, il caso di un fluido omogeneo ed incompressibile che occupi il dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Imporre le condizioni iniziali significa definire il valore a un istante iniziale (a $t = 0$) per ogni incognita che compare come derivata prima temporale. Nel nostro caso, definiamo per la velocità una condizione iniziale \mathbf{V}_0 , che assumiamo essere di classe C^∞ su tutto il dominio Ω :

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{V}_0(\mathbf{x})$$

con $\mathbf{x} \in \Omega$, che soddisfa l'equazione di continuità per un flusso incompressibile:

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_0 = 0 \quad (2.20)$$

Per quanto riguarda le condizioni al contorno, definiamo il campo di velocità in corrispondenza della frontiera $\Gamma = \partial\Omega$:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x} \in \Gamma, t) = \mathbf{V}_\Gamma(\mathbf{x}_\Gamma, t)$$

Tenendo conto dell'equazione di continuità per flussi incompressibili (2.18) e integrando sul dominio Ω , si ottiene:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{V} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{V}_\Gamma \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma = 0 \quad (2.21)$$

Infine, per un vincolo di compatibilità tra le due condizioni, deve valere:

$$\mathbf{V}_\Gamma(\mathbf{x}_\Gamma, t = 0) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{V}_0(\mathbf{x} \in \Gamma) \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (2.22)$$

In generale, esistono diversi tipi di condizioni al contorno che si possono imporre in base al tipo di problema affrontato [10]; i casi di maggiore interesse sono:

- Condizione in campo lontano: se esistono uno o più ostacoli di dimensione finita, investiti da una corrente uniforme, che facciano variare il campo di velocità nelle loro vicinanze, questo effetto deve svanire lungo una frontiera posta a distanza infinita dai corpi. La condizione al contorno deve esplicitare i valori di velocità e pressione della corrente indisturbata. Indicando con \mathbf{V}_x la velocità alla frontiera e con \mathbf{V}_∞ la velocità della corrente indisturbata, deve valere che:

$$\mathbf{V}_x = \mathbf{V}_\infty$$

- Condizione di tangenza: nel caso in cui la corrente sia delimitata dalla presenza di una parete impermeabile, in ogni punto della parete, ad ogni istante, la componente della velocità relativa \mathbf{V}_R lungo la normale alla parete deve essere nulla:

$$\mathbf{V}_R \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$$

- Condizione di aderenza: nel caso in cui la corrente sia delimitata dalla presenza di una parete impermeabile, nel caso di fluido viscoso, è lecito ammettere aderenza fra le particelle del fluido a parete e la parete stessa, per cui, indicando con \mathbf{V}_w la velocità del fluido a parete e con \mathbf{V}_{parete} la velocità della parete stessa, vale:

$$\mathbf{V}_w = \mathbf{V}_{parete}$$

Capitolo 3

Metodi level-set

Un grande numero di problemi fluidodinamici riguarda lo studio del movimento delle interfacce. Processi di interazione acqua-aria, dinamiche di solidificazione-fusione, onde superficiali, sono solo alcuni dei campi di interesse che coinvolgono questo aspetto, che non si limita solo alla fluidodinamica (figura 3.1) [1,2]. In tali applicazioni, le principali questioni da affrontare sono il moto dell'interfaccia e la dinamica del fluido che la circonda. Inoltre, fattori quali le discontinuità delle proprietà del fluido – come densità, temperatura, viscosità – attraverso l'interfaccia stessa, gli effetti della tensione superficiale, le condizioni al contorno e i cambiamenti topologici rivestono un ruolo fondamentale.

Nonostante la velocità e la capacità dei moderni calcolatori, una simulazione accurata di flussi complessi che comprendano delle interfacce in movimento resta un compito impegnativo. Negli ultimi decenni, numerose sono state le tecniche numeriche messe a punto per approcciarsi a questo tipo di problemi; tra tutte, ci concentreremo sui metodi level-set, introdotti da Osher & Sethian 1988 [6], poi implementati per lo studio dei flussi multifase da Sussman et al. 1994 [7]. Si tratta di tecniche computazionali per tracciare le interfacce all'interno di un campo di velocità, basate su una rappresentazione implicita dell'interfaccia stessa. Il risultato è un metodo idoneo a gestire casi in cui la velocità di evoluzione dell'interfaccia possa dipendere da proprietà locali, come curvatura e direzione normale, così come da condizioni fisiche complesse oltre l'interfaccia stessa, dovute alla sua posizione nel dominio. In questo, risulta molto più vantaggioso degli altri metodi di tracciamento che, invece, prevedono una rappresentazione dell'interfaccia esplicita, per i quali i cambi di topologia in dimensioni spaziali multiple richiedono un lavoro molto complesso e dispendioso.

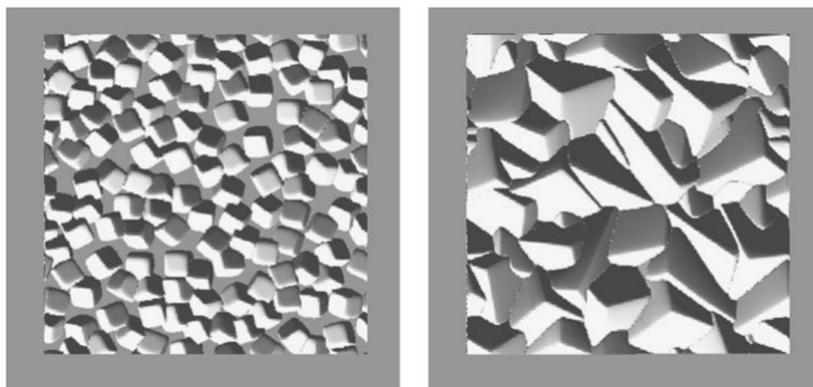


Figura 3.1: Applicazione del metodo level-set allo studio della crescita di un film di diamante in strutture cubiche [2].

Il metodo level-set si rivela, dunque, particolarmente adatto per problemi in dimensioni spaziali multiple in cui la topologia dell'interfaccia in movimento cambia nel tempo e la sua definizione deve essere preservata – anche in presenza di fusione o separazione tra le interfacce stesse; per problemi che presentano cuspidi e angoli acuti, grazie alla sua accuratezza nel calcolo delle curvatures. Per queste ragioni, viene spesso usato nello studio di flussi multifase, come verrà approfondito in quanto segue.

3.1 Descrizione teorica

L'idea su cui è basato il metodo level-set è quella di definire l'interfaccia in modo implicito, a partire da una funzione ausiliaria $\varphi(\mathbf{x}, t)$, che prende il nome di funzione level-set. L'interfaccia $\Gamma(t)$ (una curva in 2D o una superficie in 3D) è definita come l'insieme di livello zero dell'ipersuperficie $\varphi(\mathbf{x}, t)$:

$$\Gamma(t) = \{\mathbf{x} \mid \varphi(\mathbf{x}, t) = 0\} \quad (3.1)$$

ovvero l'insieme dei punti in cui la funzione assume sempre valore nullo, per convenzione (figura 3.2). Qui $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

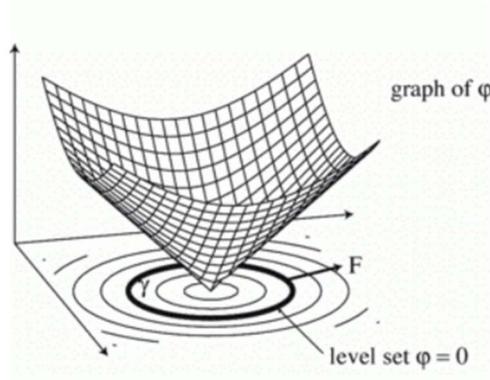


Figura 3.2: Illustrazione del funzionamento del metodo level-set.

La funzione level-set potrebbe essere una qualsiasi funzione regolare, lipschitziana – una condizione più forte della continuità, per cui la funzione ha una crescita limitata, ovvero il rapporto tra la variazione di ordinata e la variazione di ascissa non può superare un valore fissato – arbitraria, purché il suo insieme di livello zero coincida con l'interfaccia studiata. Sia $\Omega(t)$ la regione delimitata dalla curva $\Gamma(t)$. Si sceglie $\varphi(\mathbf{x}, t)$ come la funzione di distanza con segno da Γ :

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} +d & \text{per } \mathbf{x} \in \Omega \\ -d & \text{per } \mathbf{x} \notin \Omega \\ 0 & \text{per } \mathbf{x} \in \partial\Omega = \Gamma \end{cases} \quad (3.2)$$

dove d è la distanza euclidea da Γ , e soddisfa $|\nabla d| = 1$ (figura 3.3). Tale scelta è dovuta alle proprietà di conservazione della massa e all'accuratezza nel calcolo di quantità geometriche (come vettore normale e curvatura locali). La funzione $\varphi(\mathbf{x}, t)$ è assunta in modo da prendere positivi i valori all'interno della regione $\Omega(t)$ delimitata dall'interfaccia e negativi i valori esterni. Nel caso dell'interfaccia tra due fluidi, ad esempio, la funzione risulta positiva all'interno di un fluido, negativa nell'altro e nulla sull'interfaccia, di modo che la funzione φ vari gradualmente attraverso l'interfaccia stessa.

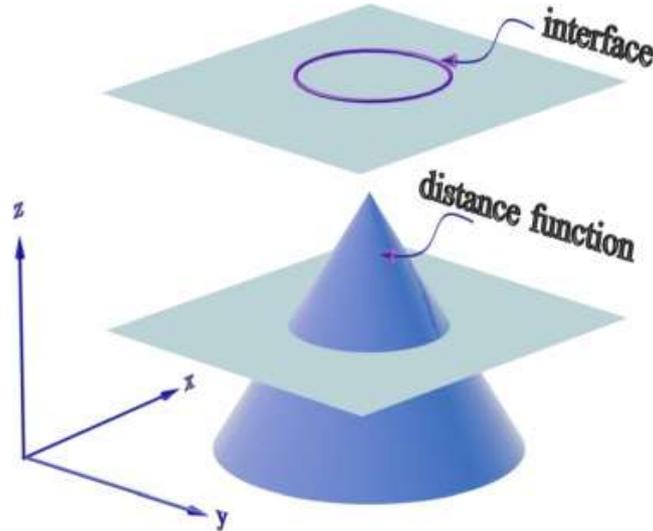


Figura 3.3: Illustrazione del funzionamento del metodo level-set.

Un vantaggio che consegue da questa scelta è che il vettore normale e la curvatura di un'interfaccia possono essere ottenuti direttamente dalla funzione level-set φ . Infatti, la normale all'interfaccia è data da:

$$\mathbf{n} = -\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|} \quad (3.3)$$

Mentre la curvatura è definita come:

$$k = -\nabla \cdot \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|} \quad (3.4)$$

Inoltre, la proiezione su Γ di un dato punto \mathbf{x} per cui $\nabla\varphi(\mathbf{x})$ è ben definito, è facilmente calcolabile come:

$$\mathbf{x}_\Gamma = \mathbf{x} - \varphi(\mathbf{x})\nabla\varphi(\mathbf{x}) \quad (3.5)$$

Definendo nel modo presentato la funzione level-set, l'interfaccia viene "catturata" in ogni istante, semplicemente individuando l'insieme $\Gamma(t)$ per cui $\varphi(\mathbf{x}, t)$ si annulla. Questo risultato è estremamente significativo dal punto di vista computazionale, perché permette di gestire in modo semplice cambiamenti topologici anche molto complessi. L'evoluzione dell'interfaccia

all'interno di un campo di velocità \mathbf{V} è riprodotta attraverso una semplice equazione di convezione:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \varphi = 0 \quad (3.6)$$

In realtà, è sufficiente tenere conto della sola componente della velocità normale all'interfaccia, $V_n = \mathbf{V} \cdot \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|}$, per cui l'equazione (3.6) diventa:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V_n |\nabla \varphi| = 0 \quad (3.7)$$

La strategia per modellare un flusso multifase, nota la posizione iniziale dell'interfaccia, è di calcolare l'evoluzione della stessa all'interno di un dato campo di velocità. Per risolvere le equazioni di Navier-Stokes, è necessario conoscere la distribuzione sull'intero dominio delle proprietà dei fluidi – densità ρ , viscosità μ . Poiché, se il fluido è assunto incompressibile, densità e viscosità sono costanti al suo interno, queste assumono valori differenti in base al segno di φ . Indicando i due fluidi a contatto con i pedici 1 e 2, possiamo scrivere:

$$\rho(\varphi) = \rho_1 H(\varphi) + \rho_2 (1 - H(\varphi)) \quad (3.8)$$

$$\mu(\varphi) = \mu_1 H(\varphi) + \mu_2 (1 - H(\varphi)) \quad (3.9)$$

dove $H(\varphi)$ è la funzione di Heaviside:

$$H(\varphi) = \begin{cases} 1, & \varphi > 0 \\ \frac{1}{2}, & \varphi = 0 \\ 0, & \varphi < 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

3.2 Condizioni all'interfaccia

Poiché densità e viscosità sono entrambe discontinue attraverso l'interfaccia, è lecito aspettarsi delle instabilità nella soluzione. Per risolvere questi problemi è necessario imporre delle condizioni, che assicurino la continuità della massa e della quantità di moto attraverso l'interfaccia [9]:

$$[\mathbf{V}] = 0 \quad (3.10)$$

$$[p\mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot \mu(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T)] = \gamma k \mathbf{n} \quad (3.11)$$

dove le parentesi quadre denotano i salti attraverso l'interfaccia ($[q] = q^+ - q^-$, dove gli apici + e – si riferiscono alle due porzioni di spazio delimitate dall'interfaccia); k indica la curvatura, definita come in (3.4), mentre γ è la tensione superficiale. La prima condizione esprime che il salto di velocità attraverso l'interfaccia deve essere nullo, ovvero le velocità all'interfaccia dei due fluidi a contatto devono essere le stesse. La seconda condizione, invece, riguarda gli sforzi:

la discontinuità che si riscontra nei valori di pressione e sforzi viscosi nell'attraversare l'interfaccia deve coincidere con la tensione superficiale.

Sia \mathbf{s} un vettore parallelo all'interfaccia e $V_s = \mathbf{s} \cdot \mathbf{V}$, allora si dimostra [11,12] che, in generale, vale:

$$\left[\frac{\partial V_n}{\partial n} \right] = 0 \quad (3.12)$$

$$\left[\frac{\partial V_n}{\partial s} \right] = 0 \quad (3.13)$$

$$\left[\frac{\partial V_s}{\partial n} \right] = -[\mu] \frac{\partial V_n}{\partial s} \quad (3.14)$$

$$\left[\frac{\partial V_s}{\partial s} \right] = 0 \quad (3.15)$$

Si noti che, se la viscosità è continua all'interfaccia, il sistema di equazioni (3.12-15) mostra che le derivate delle componenti della velocità sono anche continue. In quel caso le equazioni (3.10) e (3.11) si riducono a:

$$[\mathbf{V}] = 0 \quad (3.16)$$

$$[p] = \gamma k \quad (3.17)$$

Affinché ciò avvenga, l'espressione della viscosità deve essere resa continua:

$$\mu(\varphi) = \mu_1 H_\varepsilon(\varphi) + \mu_2 (1 - H_\varepsilon(\varphi)) \quad (3.18)$$

A questo proposito viene introdotta la funzione di Heaviside regolarizzata H_ε :

$$H_\varepsilon = \begin{cases} 0 & \varphi < -\varepsilon \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varphi}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \sin \left(\frac{\varphi}{\varepsilon} \pi \right) \right), & |\varphi| \leq \varepsilon \\ 1 & \varphi > \varepsilon \end{cases} \quad (3.19)$$

Con questa descrizione alternativa, viene assegnato all'interfaccia uno spessore pari a $\varepsilon = \alpha \Delta x$, e vengono regolarizzate le discontinuità a cavallo dell'interfaccia; α è un parametro positivo che dipende dalla larghezza Δx della mesh (in geometry processing, il reticolo che definisce un oggetto nello spazio) adottata.

3.3 Reinizializzazione

Nella formulazione sopra descritta, l'interfaccia avrà uno spessore uniforme finché φ resta una funzione di distanza con segno. Tuttavia, sotto l'equazione di trasporto (3.6) dovuta al campo di velocità, gli insiemi di livello adiacenti all'insieme di livello zero potrebbero muoversi a velocità diversa rispetto agli altri. Di conseguenza, la funzione level-set φ viene distorta e smette di essere una funzione di distanza con segno. La simulazione potrebbe procedere usando la stessa funzione φ , ma i vincoli prima imposti – vale a dire che la funzione sia regolare e continua – potrebbero

non essere più soddisfatti dopo aver eseguito varie iterazioni. Dunque, a intervalli regolari è necessario riportare la funzione level-set φ alla funzione di distanza con segno, conservando la posizione del suo insieme di livello zero. Questo processo viene detto reinizializzazione [6,7].

Esistono diversi modi per eseguire la reinizializzazione [13]. Uno è l'approccio diretto, che consiste semplicemente nel fermarsi ad ogni step e trovare nuovamente la distanza con segno dalla frontiera; tuttavia, questo metodo può risultare estremamente dispendioso dal punto di vista computazionale. Una tecnica diversa, il cui vantaggio è che la funzione level-set viene reinizializzata senza dover trovare esplicitamente l'insieme di livello zero, è stata introdotta da Sussman et al. 1994 [7] e prevede di dover risolvere la seguente equazione alle derivate parziali:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = S(\varphi_0)(1 - |\nabla \varphi|) \quad (3.20)$$

dove $S(\varphi_0)$ è la funzione segno:

$$S(\varphi_0) = \begin{cases} -1, & \varphi_0 < 0 \\ 0, & \varphi_0 = 0 \\ 1, & \varphi_0 > 0 \end{cases}$$

e φ_0 è la funzione level set all'istante di inizio reinizializzazione, mentre τ è uno pseudo-tempo.

Le soluzioni stazionarie dell'equazione (3.20) sono le funzioni di distanza: dato un valore iniziale per φ , risolvere quest'equazione allo stato stazionario fornisce il campo di distanza φ che soddisfa la proprietà $|\nabla \varphi| = 1$ (poiché la convergenza si ha quando il secondo membro dell'equazione è nullo). Si noti che la funzione segno $S(\varphi_0)$ controlla il flusso di informazione: se positiva, l'informazione fluisce in un verso; se negativa, fluisce nel verso opposto. L'effetto è il ridistanziamento della funzione level-set da entrambi i lati dell'insieme di livello zero, ovvero dell'interfaccia.

A questo punto, per non avere discontinuità nel passaggio attraverso l'interfaccia, sostituiamo la classica funzione segno con una regolarizzata, così definita:

$$S_\varepsilon(\varphi) = 2 \left(H_\varepsilon(\varphi) - \frac{1}{2} \right) \quad (3.21)$$

Si noti che lo pseudo-tempo che compare nella (3.20) non si riferisce in nessun modo al tempo fisico. Quindi, poiché la reinizializzazione della funzione level-set è richiesta solo nelle vicinanze dell'interfaccia, è sufficiente risolvere l'equazione solo per valori di τ compresi tra 0 e $\varepsilon \times \nu$ (ricordiamo che ε è lo spessore dell'interfaccia), con ν definita come:

$$\nu = S_\varepsilon(\varphi_0) \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \quad (3.22)$$

Riscriviamo quindi l'equazione (3.20), facendo comparire ν :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \nu \cdot \nabla \varphi = S_\varepsilon(\varphi_0) \quad (3.33)$$

La nuova equazione (3.33) è iperbolica non lineare, e le caratteristiche – vale a dire delle curve lungo le quali una equazione differenziale alle derivate parziali si comporta come un'equazione differenziale ordinaria – sono normali all'interfaccia e puntano lontano da essa in entrambe le direzioni.

3.4 Modellazione della tensione superficiale

Per molti problemi fluidi, il moto dell'interfaccia indotto dalla tensione superficiale può giocare un ruolo significativo. La forza di tensione superficiale è il risultato di uno squilibrio nelle forze molecolari percepito dalle molecole del fluido vicine all'interfaccia; ciò crea delle forze superficiali microscopiche e localizzate che sono dirette sia tangenzialmente che in direzione normale all'interfaccia stessa. Per rappresentare l'effetto della tensione superficiale usiamo l'approccio proposto da Brackbill et al. 1992 [14] che introduce la definizione di una forza di volume dovuta alla tensione superficiale:

$$f = \frac{k\nabla H_\varepsilon(\varphi)}{W} \quad (3.34)$$

Dove $k = k(\varphi)$ è la curvatura dell'interfaccia definita con nell'equazione (3.4), H_ε è la funzione di Heaviside regolarizzata (3.19), mentre W è il numero di Weber, che esprime la relazione tra forze di inerzia e tensione superficiale, definito come:

$$W = \frac{\rho LU^2}{\gamma} \quad (3.35)$$

dove ρ è la densità del fluido, L la lunghezza caratteristica del problema, U la velocità del fluido e γ la tensione superficiale.

3.5 Accoppiamento equazioni

Come menzionato in precedenza, una classe importante di problemi che comprendono il tracciamento di un'interfaccia è costituita dai flussi multifase, costituiti da fluidi immiscibili e, nella nostra trattazione, incompressibili, governati dalle equazioni di Navier-Stokes. Tale sistema di equazioni (2.18, 2.19), già presentato nel capitolo precedente, può essere accoppiato con le equazioni e le condizioni al contorno del metodo level-set [6]. Riscriviamo quindi le equazioni di governo come:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \varphi = 0 \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi = S_\varepsilon(\varphi_0) \quad (3.38)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu(\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T)] + \rho \frac{k \nabla H_\varepsilon(\varphi)}{W} \quad (3.39)$$

dove \mathbf{V} è il campo di velocità, p è la pressione, $\rho = \rho(\varphi)$ e $\mu = \mu(\varphi)$ sono rispettivamente la densità e la viscosità definite in precedenza (regolarizzate).

È importante notare che nell'equazione (3.39) compare, come termine di forza di campo, la forza dovuta alla tensione superficiale (3.34) introdotta nel paragrafo precedente. In questo modo, nella descrizione dei flussi multifase si riesce a tenere conto della tensione superficiale come un effetto tridimensionale attraverso l'interfaccia.

Capitolo 4

Applicazioni

Tra le numerose applicazioni del metodo level-set per il tracciamento delle interfacce nella meccanica dei fluidi, ritroviamo i problemi che includono i flussi multifase, la dinamica delle bolle e i flussi compressibili (questi ultimi non verranno affrontati nella nostra trattazione). In seguito, ne riassumiamo alcune tra le più importanti, riportando esempi di simulazioni e risultati numerici.

4.1 Dinamica delle bolle

Il moto delle bolle dovuto al galleggiamento in un fluido, in quiete o in movimento, è stato studiato per secoli e continua ad essere un problema di grande interesse ancora oggi, in quanto ha applicazione in numerosi processi meccanici e industriali. In letteratura sono presenti diversi studi ed esperimenti che riguardano il moto e la deformazione di bolle in un liquido, il trasferimento di massa e di calore e altri fenomeni ad esso legati.

Si consideri una bolla di gas inizialmente ferma nel fluido in cui è immersa. Idealmente, il salto di pressione dovrebbe essere esattamente bilanciato dalle forze di tensione superficiale, come esposto nel capitolo precedente, di modo che la forma della bolla resti sostanzialmente invariata. La bolla inizia a salire (o scendere) nel liquido a causa della forza di galleggiamento:

$$\mathbf{f}_g = \rho_{fl} g \mathcal{V} \quad (4.1)$$

dove ρ_{fl} indica la densità del fluido in cui il corpo è immerso, g è la forza di gravità e \mathcal{V} il volume immerso nel fluido. Tale espressione della forza deriva dal principio di Archimede, per cui un corpo immerso, totalmente o parzialmente, in un fluido, riceve una spinta verso l'alto pari al peso del liquido spostato.

A mano a mano che la bolla si muove, il liquido che la circonda inizia a muoversi a sua volta, e ciò genera gradienti di pressione che inducono deformazioni della stessa.

Il problema è completamente descritto da quattro parametri adimensionali [15]:

- il numero di Galilei, che mette in relazione la forza di gravità con le forze viscosive, così definito:

$$Ga = \frac{gL^3}{\nu^2} \quad (4.2)$$

dove g è l'accelerazione di gravità, L è la lunghezza caratteristica del fenomeno di interesse e ν è la viscosità cinematica;

- il numero di Eötvös, che mette in relazione le forze di galleggiamento e la tensione superficiale:

$$Eo = \frac{\Delta\rho g L^2}{\gamma} \quad (4.3)$$

dove $\Delta\rho$ indica la variazione di densità tra le due fasi e γ è la tensione superficiale.

In alternativa, si può usare l'analogo numero di Bond:

$$Bo = \frac{\rho g L^2}{\gamma} \quad (4.4)$$

Nel caso di un numero di Eötvös (o di Bond) molto piccolo, le tensioni superficiali prevalgono rispetto alla forza peso.

- il rapporto di densità η e il rapporto di viscosità β tra i due fluidi a contatto:

$$\eta = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad \beta = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (4.5)$$

dove i pedici 1 e 2 si riferiscono rispettivamente al fluido che forma le bolle e a quello in cui queste sono immerse.

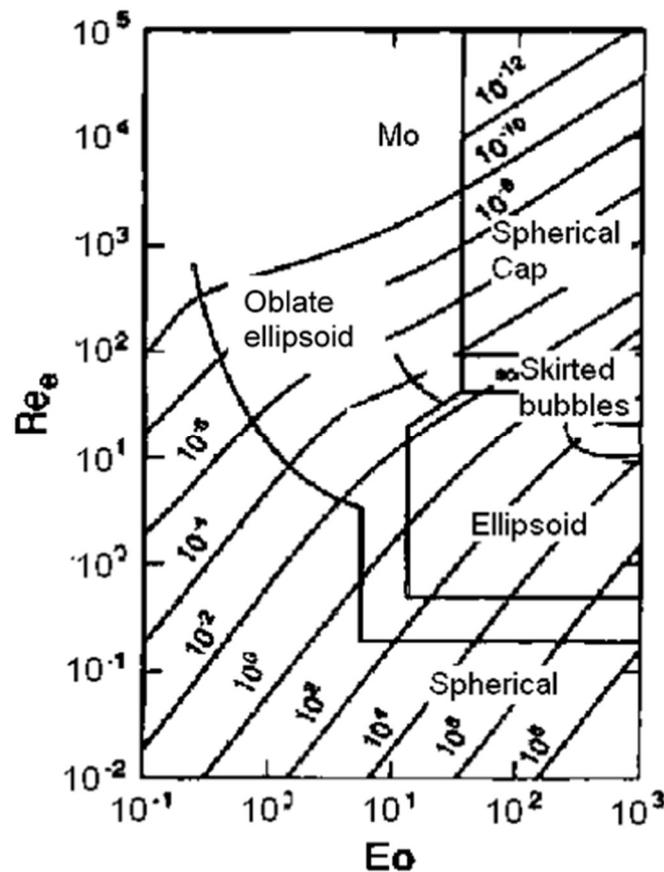


Figura 4.1: Mapa delle forme terminali delle bolle in funzione dei numeri di Reynolds, Eötvös e Morton [15].

Ricordiamo inoltre la definizione del numero di Reynolds:

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} \quad (4.6)$$

dove ρ è la densità del fluido, L la lunghezza caratteristica del problema, U la velocità del fluido e μ la viscosità dinamica.

Una bolla che si muove in un liquido potrebbe non arrivare mai a una velocità limite costante, e anche se ciò dovesse verificarsi, non sarebbe comunque una velocità conosciuta a priori. Per questo, i numeri di Galilei e di Eötvös sono parametri che meglio descrivono il fenomeno, piuttosto che i numeri di Reynolds e di Weber. Vale la pena anche menzionare il numero di Morton, che è utilizzato insieme al numero di Eötvös per caratterizzare la forma di una sfera di fluido (nel nostro caso una bolla) così definito:

$$M = \frac{Bo^3}{Re^4} \quad (4.7)$$

A questo punto citiamo lo studio di Grace 1973 [15], qui non approfondito ma decisamente utile alla nostra trattazione, in cui viene presentata una suddivisione per forma e diametro delle bolle in base ai parametri sopra introdotti. In figura 4.1 vediamo una schematizzazione di questo risultato: i confini tra i principali regimi di forma in realtà non sono netti, esistono varie forme intermedie tra quelle presentate. Tuttavia, è chiaro che per valori contenuti del numero di Reynolds, le bolle assumeranno la classica forma sferica; per valori alti del numero di Eötvös, al crescere del Re si succedono la bolla ellissoidale, la “skirted bubble” (figura 4.2) e la “spherical cup”. Questo schema resta uno strumento utilissimo per mostrare il vasto range di comportamenti che bolle e gocce possono assumere sotto diverse condizioni.

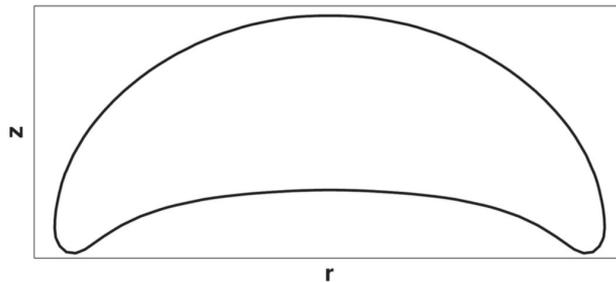


Figura 4.2: Skirted bubble

Dopo aver fornito una descrizione del problema, intendiamo analizzare come il metodo level-set si applica ad esso, e lo facciamo concentrandoci su alcuni fenomeni di particolare interesse: (i) il movimento di una bolla isolata immersa all'interno di una colonna di fluido, (ii) lo scoppio di una bolla su una superficie libera, (iii) la coalescenza tra due bolle, (iv) la formazione di bolle da un orifizio.

Per dimostrare la validità del metodo level-set applicato al tracciamento delle interfacce in questo contesto, riferiamoci ad alcuni studi che presentano degli esempi di nostro interesse [3,13,16,17], da cui sono tratti i risultati che seguono.

4.1.1 Applicazioni 2D

Analizziamo il movimento di una bolla isolata immersa all'interno di una colonna di fluido, concentrandoci inizialmente sul problema semplificato in due dimensioni [13]. Si consideri un dominio rettangolare, in cui il liquido si muove verso l'alto a una velocità uniforme di 1 m/s, e si trascurino inizialmente le forze di galleggiamento. Allora, la bolla si muoverà nel dominio alla stessa velocità del fluido, e di conseguenza la sua forma e il suo volume saranno preservati durante il moto, come mostrato in figura 4.3.

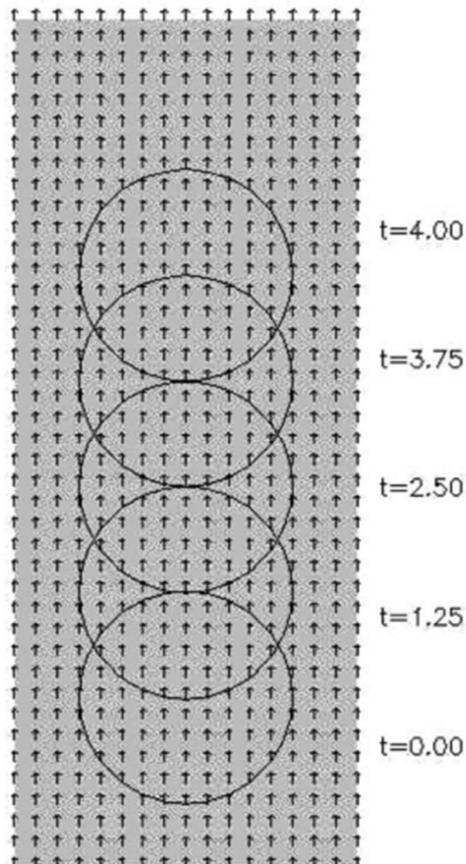


Figura 4.3: Posizione della bolla a diversi istanti di tempo [13].

Tenendo conto invece delle forze di galleggiamento, assistiamo a un fenomeno più complesso, che prevede non solo l'ascesa, ma anche la deformazione della bolla durante il suo moto all'interno del liquido in cui è immersa.

Basandoci sulla simulazione effettuata da Nagrath et al. [13], consideriamo una bolla d'aria immersa in acqua, di cui le densità sono rispettivamente $\rho_1 = 1,226 \text{ kg/m}^3$ e $\rho_2 = 1000 \text{ kg/m}^3$; quindi, il rapporto di densità η acqua-aria è di circa 10^3 . Le viscosità del liquido e dall'aria sono rispettivamente $\mu_1 = 3,5 \text{ e}^{-1} \text{ kg/ms}$ e $\mu_2 = 3,58 \text{ e}^{-3} \text{ kg/ms}$; il rapporto di viscosità acqua-aria è circa $\beta = 100$. Si sceglie, come nel caso precedente, un dominio rettangolare; la posizione e forma iniziale della bolla, sono mostrate in figura 4.4.

Definiamo i parametri per la descrizione del fenomeno: $Re = 100$; $EO = 200$; $M = 0,8$. Dallo schema di Grace [15], ci aspetteremmo una forma detta “skirted bubble”, che dovrebbe apparire come nella figura 4.2.

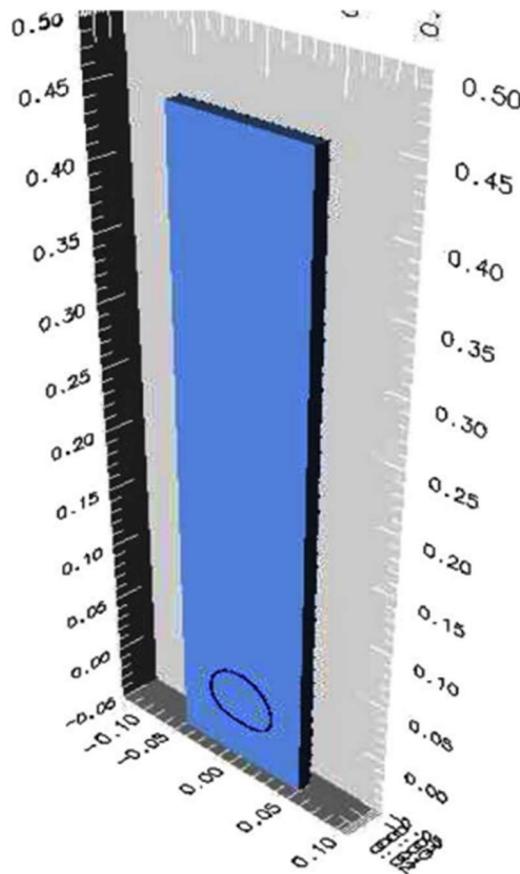


Figura 4.4: Posizione iniziale della bolla [13].

Il valore della pressione iniziale è quello imposto dalla colonna di fluido.

Quando la bolla comincia a salire, a causa delle forze di galleggiamento che agiscono su di essa, il gradiente di pressione sulla superficie inferiore della bolla è più alto che in quella superiore. Ciò genera un vortice che induce un getto d'acqua a spingere la bolla dal basso; tale getto ancora non influenza la superficie superiore della bolla, ma solo quella inferiore: la velocità sull'interfaccia inferiore è maggiore rispetto a quella sull'interfaccia superiore, e questo determina una distorsione nella forma della bolla, che aumenta nel tempo andando a formare la cosiddetta

“skirted bubble”, come previsto da Grace [15]. La simulazione del processo, ottenuta applicando il metodo level-set, è illustrata in figura 4.5.

In alcuni casi, per maggiori numeri di Reynolds, si può verificare che la spinta data dal getto di liquido sulla superficie inferiore della bolla sia tale da portare alla formazione di piccole bolle satellite distaccatesi dalla singola bolla iniziale. Il vantaggio del metodo level-set qui evidente è che il distacco delle bolle è prevedibile senza bisogno di alterare l’algoritmo.

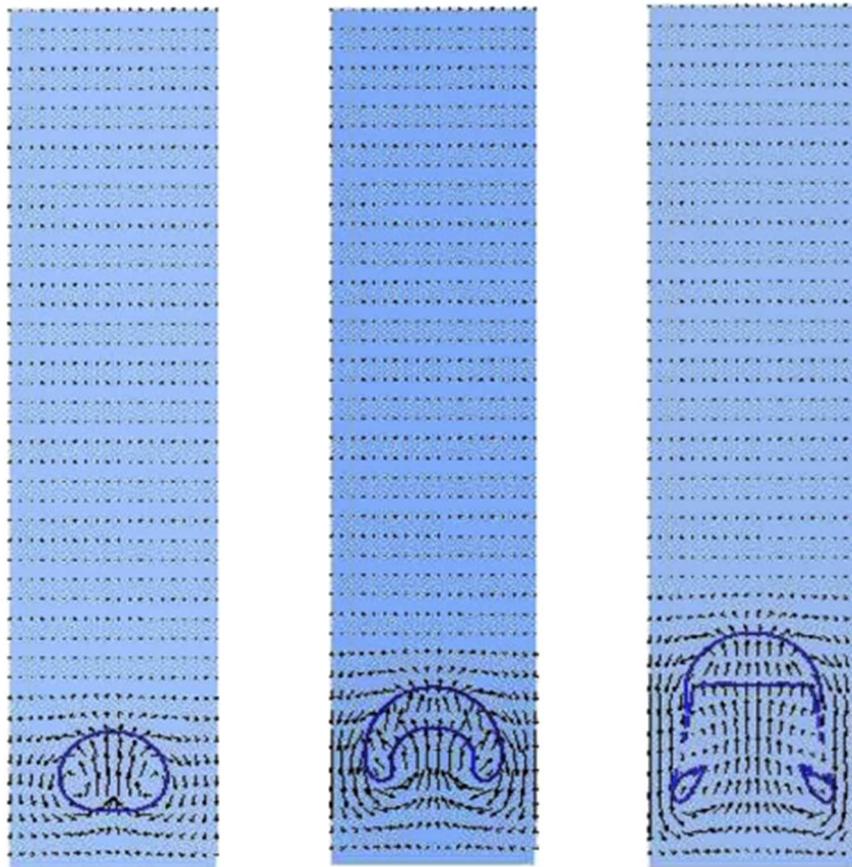


Figura 4.5: Evoluzione di una bolla che sale in una colonna di fluido per effetto del galleggiamento [13].

4.1.2 Applicazioni 3D

Si prosegue poi presentando i risultati di una simulazione tridimensionale [13], che permette di tracciare il movimento di una bolla inizialmente perfettamente sferica immersa in un liquido. Vengono considerati due casi, uno a Reynolds basso, pari a 10, e numero di Bond pari a 5; l’altro a Reynolds alto, pari a 100, e numero di Bond pari a 50. Inizialmente il fluido è in quiete, e la

pressione iniziale è quella della colonna di fluido. La posizione iniziale della bolla è mostrata nelle figure 4.6a e 4.7a.

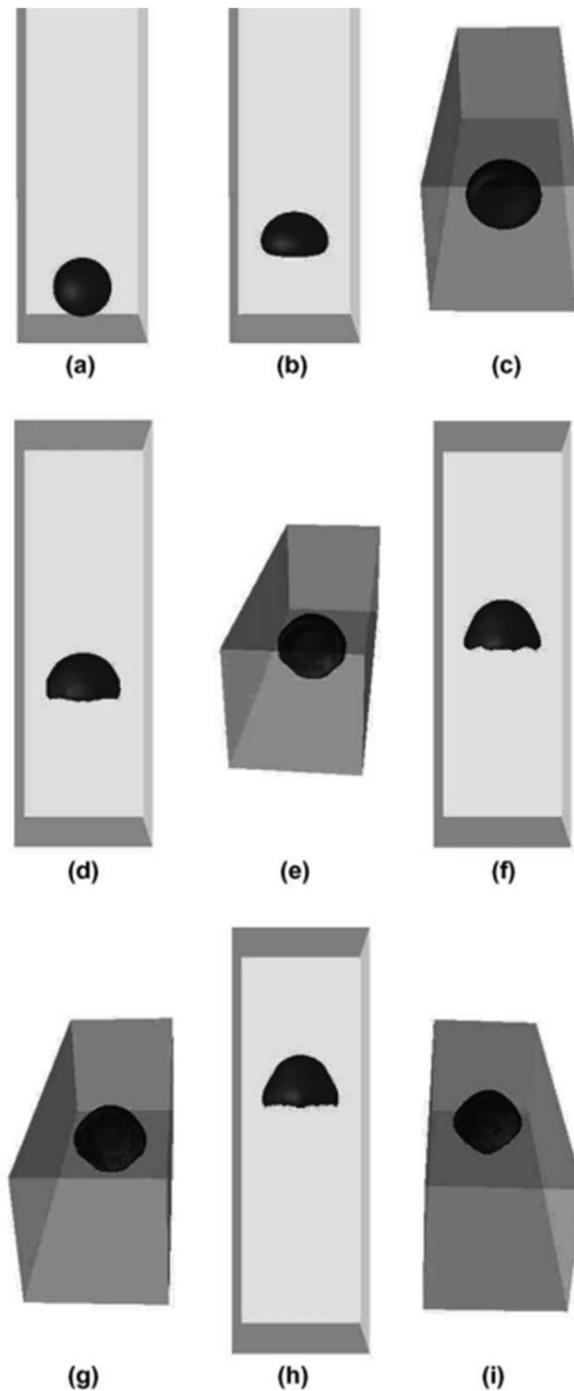


Figura 4.6: Evoluzione di una "spherical bubble" a bassi numeri di Reynolds [13].

Per un basso numero di Reynolds, viene scelto un rapporto di viscosità β pari a 40; lo stesso valore viene scelto per il rapporto di densità η : si tratta di un flusso ad alte viscosità e tensione superficiale. I risultati, ottenuti ancora una volta mediante metodi level-set e mostrati in figura

4.6 nei diversi istanti e da diverse prospettive, combaciano nuovamente con le previsioni di Grace [15]: inizialmente la bolla sale fino ad assumere una forma ellittica (4.6b) a causa del gradiente di pressione tra la superficie superiore e inferiore; la superficie superiore si muove più velocemente di quella inferiore, che si appiattisce, e ciò gli fa assumere la caratteristica forma a “spherical cap bubble” (4.6d, f, h).

Per un alto numero di Reynolds, i rapporti di viscosità β e densità η sono scelti uguali e pari a 80. In questo caso, il getto di liquido è molto più forte, e porta la bolla prima ad assumere una forma a campana (4.7e), poi una forma toroidale (4.7f) e infine al distacco della punta della superficie superiore dal resto della bolla (4.7h, i).

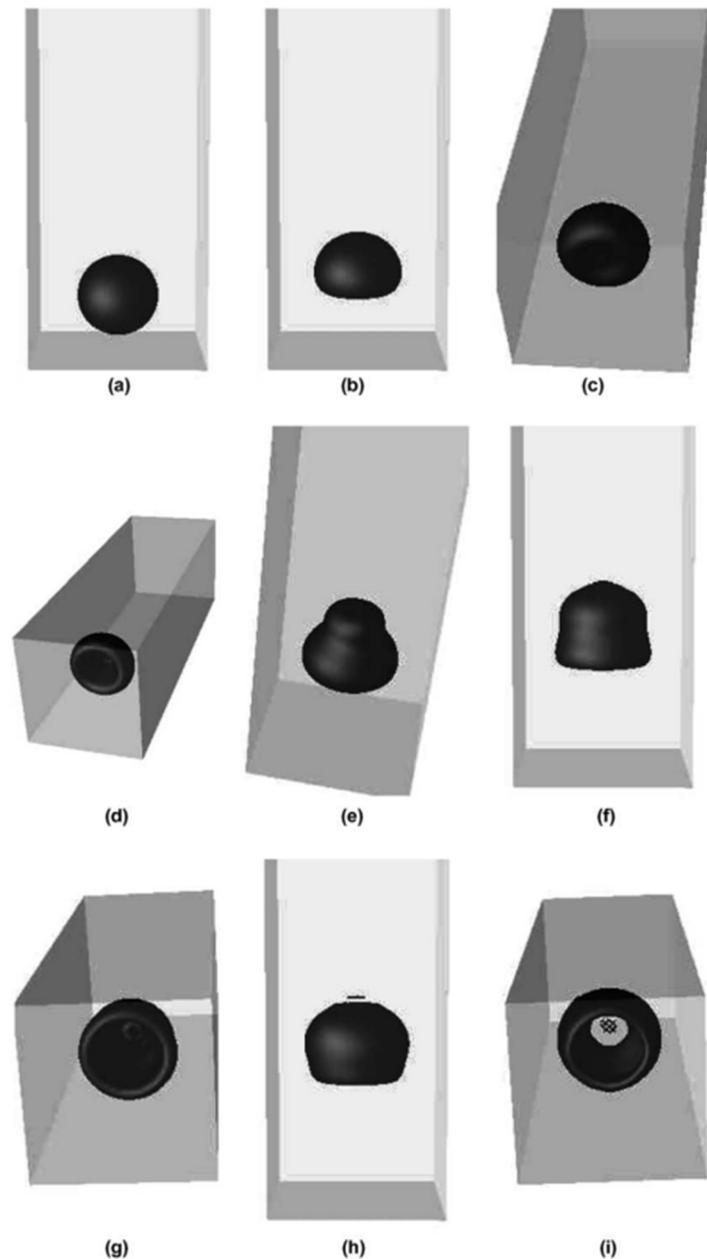


Figura 4.7: Evoluzione di una “spherical bubble” ad alti numeri di Reynolds [13].

4.1.3 Scoppio di una bolla su una superficie libera

Discutiamo ora il caso di applicazione del metodo level-set allo studio dello scoppio di bolle su una superficie libera. Usando una versione del metodo level-set accoppiato con il metodo volume-of-fluid [16], viene considerata una bolla di gas di densità e viscosità costanti, che si muove con accelerazione costante dovuta alla gravità all'interno di un liquido con densità e viscosità diverse ma sempre costanti. All'inizio della simulazione, la bolla sale verso la superficie libera del liquido a causa della forza di galleggiamento. La figura 4.8 mostra l'evoluzione della bolla nel tempo, dallo scoppio sulla superficie, alla formazione di un getto di liquido, fino al distacco di piccole gocce dalla fase liquida.

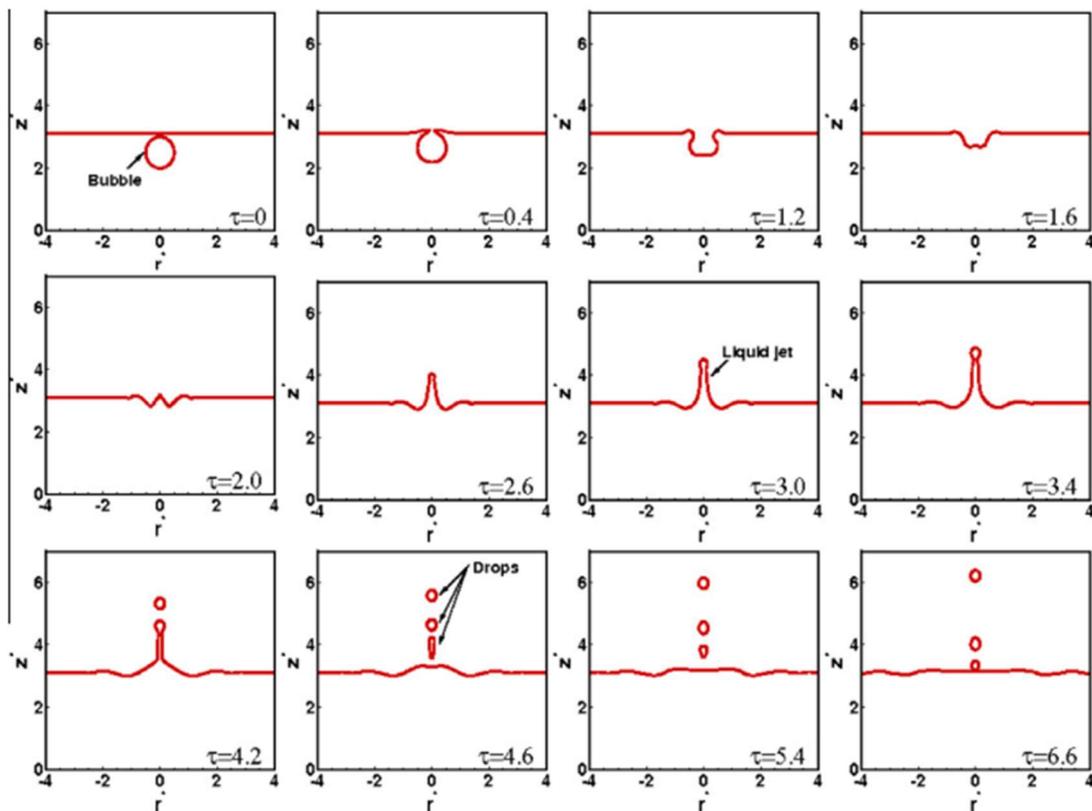


Figura 4.8: Sequenza temporale di una bolla che scoppia all'interfaccia acqua-aria [16].

4.1.4 Coalescenza di due bolle

Per coalescenza si intende il fenomeno fisico per cui delle gocce di un liquido si uniscono a formarne di più grandi. Si riportano nuovamente i dati dello studio di Nagrath et al. [13], in cui gli autori hanno applicato il metodo level-set per una simulazione tridimensionale dell'interazione tra due bolle coassiali.

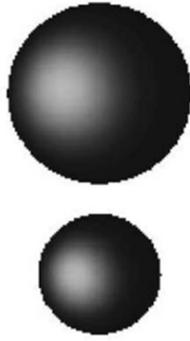


Figura 4.9: Posizione iniziale delle bolle [13].

Si considerino due bolle, di raggi diversi, di fluidi della stessa densità, immerse in un secondo fluido sotto la stessa forza di galleggiamento; la posizione iniziale delle bolle è mostrata in figura 4.9. Si tenga conto della forza di gravità in direzione verticale, verso il basso. Poiché le bolle sono più leggere del fluido che le circonda (rapporto di densità scelto pari a 0,1), saliranno spinte dal getto del fluido. Anche in questo caso, come nei precedenti, l'interfaccia inferiore delle bolle si muove più velocemente di quella superiore. Inoltre, la bolla inferiore si sposta con una velocità maggiore rispetto a quella superiore, e cambia forma: il campo di pressione e la vorticità nella scia dovuta alla bolla superiore causano un forte getto, che porta la bolla inferiore a restringersi ed allungarsi, fino a unirsi con la bolla superiore. I passi appena illustrati possono essere osservati nelle figure 4.10, 4.11, 4.12.

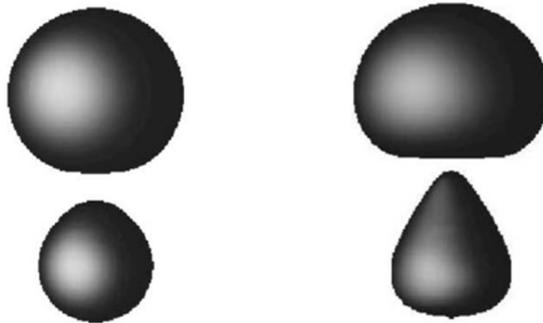


Figura 4.10: Deformazione iniziale delle bolle [13].

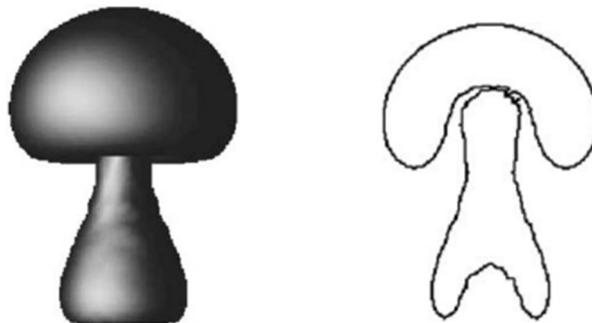


Figura 4.11: Deformazione e avvicinamento delle bolle [13].

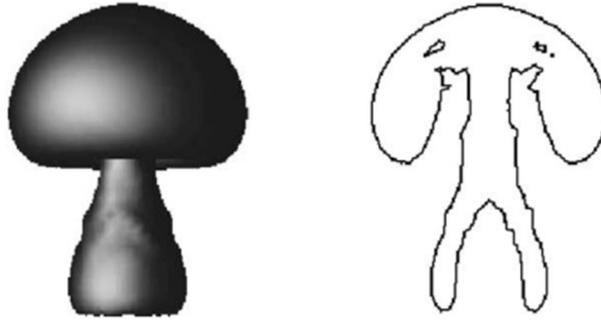


Figura 4.12: Coalescenza delle bolle [13].

4.1.5 Formazione di bolle da un orifizio

Forzando l'uscita di un gas attraverso un orifizio rivolto verso l'alto all'interno di un mezzo liquido, si vengono a formare delle bolle di gas (figura 4.13). Applichiamo il metodo level-set, accoppiato con il volume-of-fluid, nella simulazione di questo fenomeno a bassi numeri di Reynolds [16]. Il problema, oltre che dai parametri prima presentati, è descritto anche dal rapporto di velocità e dal rapporto della quantità di moto tra i due fluidi, definiti rispettivamente come:

$$v_r = \frac{v_l}{v_g} \quad (4.8)$$

$$m_r = \frac{m_l v_l}{m_g v_g} \quad (4.9)$$

dove v_l si riferisce alla velocità media del liquido, v_g è la velocità media del gas all'ingresso dell'orifizio; m_l e m_g sono rispettivamente la massa del liquido e la massa del gas.

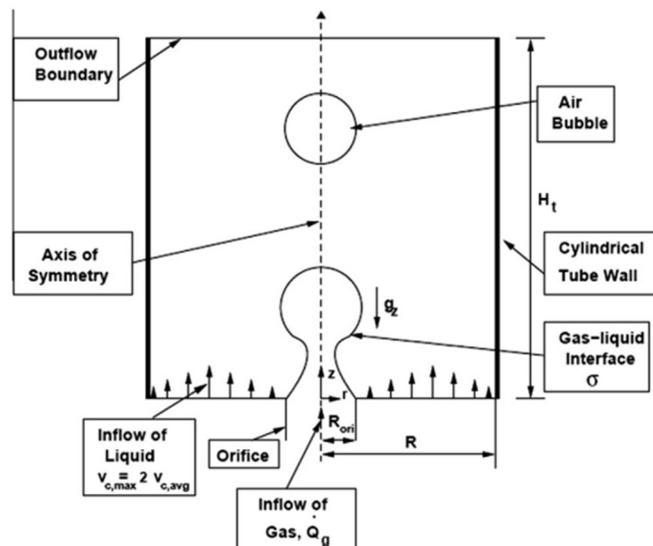


Figura 4.13: Dominio e condizioni iniziali per la formazione di bolle a partire da un orifizio [16].

In figura 4.14a-d vengono mostrati i risultati della simulazione per diversi valori di v_r e m_r , rispettivamente nell'ordine $v_r = 0; 2,2; 4,4; 8,8$ e $m_r = 0; 17,5 * 10^4; 35 * 10^4; 70 * 10^4$. Si evince che il processo di formazione di una bolla, per bassi numeri di Reynolds, presenta diverse caratteristiche per ogni caso. Nel primo, ovvero il caso di liquido quiescente, si verifica il distacco della bolla vicino all'uscita dell'orifizio; tuttavia, a mano a mano che il rapporto di velocità v_r aumenta, all'uscita dell'orifizio si crea un getto di gas, e delle bolle satellite iniziano a formarsi dalla punta dello stesso. Si può osservare che, con l'aumentare di v_r e di m_r , il volume delle bolle diminuisce e il gas jet si assottiglia.

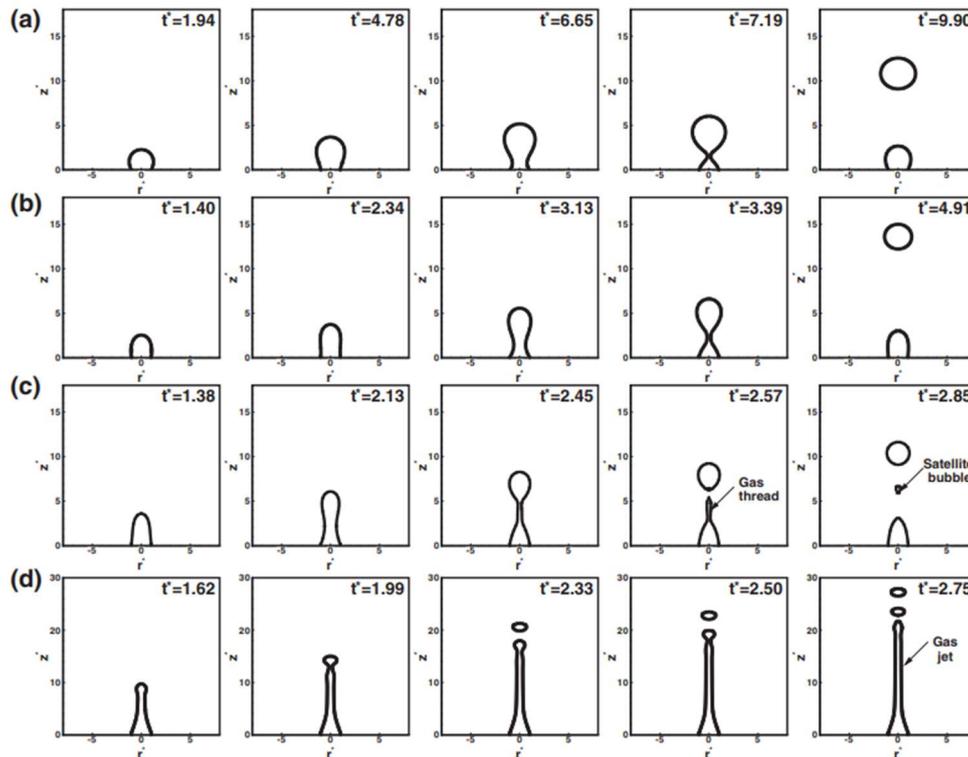


Figura 4.14: Formazione di bolle da un orifizio per diversi valori di v_r e m_r [16].

4.2 Contrazione di un filamento liquido

Applichiamo il metodo level-set per studiare l'evoluzione di un filamento di liquido in contrazione fino alla sua rottura, tenendo conto contemporaneamente degli effetti della tensione superficiale e della viscosità [3]. La forma iniziale del filamento è quella di un cilindro con entrambe le estremità emisferiche. Che il filamento si rompa in numerose gocce satellite o si contragga in una singola, dipende dal rapporto $L_0 = L/R$ (dove L è la lunghezza del filamento e R è il raggio del cilindro) e dal numero adimensionale di Ohnesorge, che esprime il rapporto tra forze di dissipazione e forze di coesione sulla superficie del fluido, definito come:

$$Oh = \frac{\mu}{\sqrt{\rho\gamma R}} \quad (4.10)$$

dove μ è la viscosità dinamica del liquido, ρ è la densità, γ è la tensione superficiale. Numeri di Ohnesorge maggiori indicano una forza di coesione maggiore in condizioni statiche.

Consideriamo un primo caso con $L_0 = 9$ e $Oh = 0.04$, e osserviamo la forma del filamento in contrazione a diversi istanti di tempo (figura 4.15): si può notare che la simulazione è in accordo con i risultati dell'esperimento fisico da cui è tratto [18]. Il valore basso di L_0 è causa del fatto che il filamento si contrae velocemente, poiché le forze capillari non sono sufficienti ad opporsi alle forze viscosi, e ciò impedisce al filamento di separarsi in gocce più piccole.

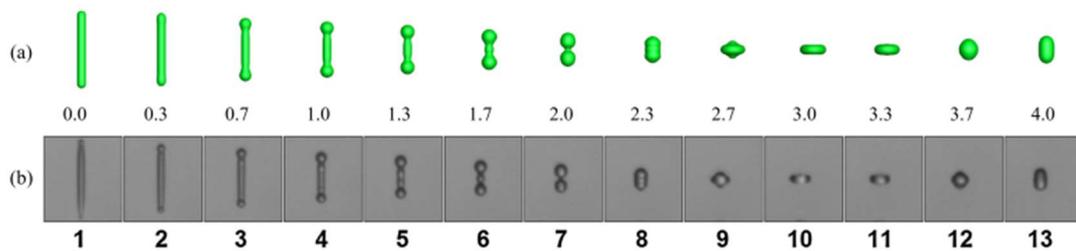


Figura 4.15: Contrazione di un filamento di liquido: (a) Risultati della simulazione; (b) Risultati dell'esperimento.

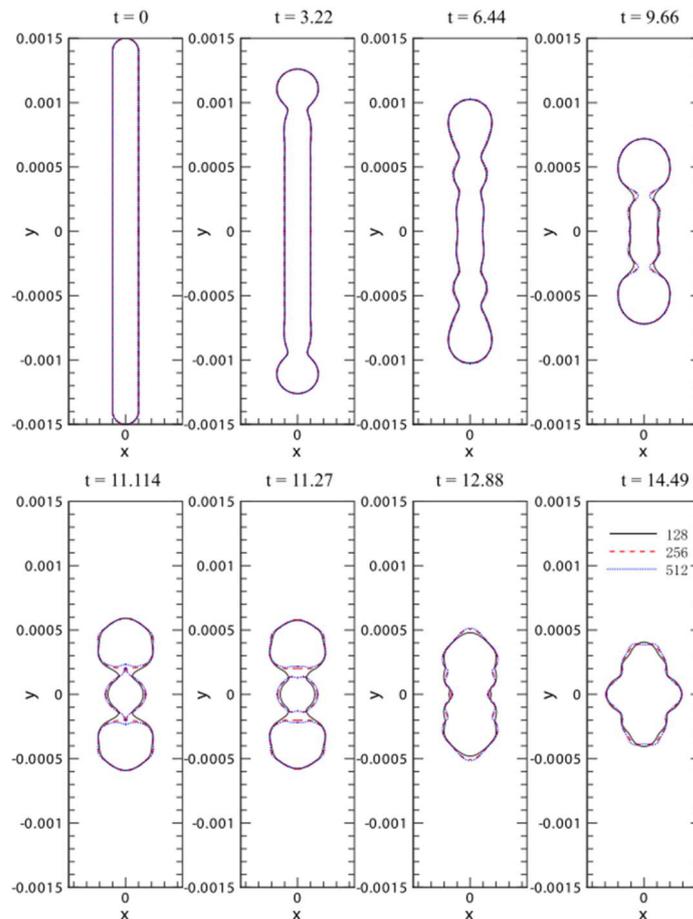


Figura 4.16: Evoluzione della rottura di un filamento di liquido [3].

Se invece si sceglie $L_0 = 15$ e $Oh = 10^{-2}$, inizialmente il filamento inizia a modificarsi con la formazione di due bulbi alle estremità, come nel caso superiore; tuttavia, risulta che nei colli assottigliati la forza capillare domina sulle forze viscosse e i bulbi finiscono per staccarsi. Subito dopo, le gocce formate si riuniscono a causa degli effetti di inerzia. I risultati sono mostrati nella figura 4.16.

4.3 Linee di contatto

Presentiamo un altro esempio di applicazione del metodo level-set per gestire cambiamenti topologici delle interfacce: si tratta di una simulazione bidimensionale dove due linee di contatto tra due fluidi diversi si uniscono in una sola [17]. Ogni volta che due fluidi si incontrano a parete, si forma una linea di contatto tra le tre fasi. Il problema, mostrato in figura 4.17, presenta due pareti a distanza H e di lunghezza $4H$. Il fluido inizialmente occupa un volume corrispondente a un trapezoide, di base $2H$, i cui lati formano con l'orizzontale un angolo di 120° . Il rapporto di densità tra il fluido e l'aria che lo circonda è scelto di 1000, il rapporto di viscosità è unitario. Sono imposte alle pareti le condizioni di aderenza.

La figura 4.18 ci mostra l'evoluzione del sistema a partire dall'istante iniziale, dovuta esclusivamente alla forza di gravità. A mano a mano che il fluido scivola verso il basso, la curvatura indotta dell'interfaccia provoca una tensione capillare che si oppone alla forza di gravità. Ciononostante, il fluido continua a muoversi fino a che le due estremità delle linee di contatto non si uniscono.

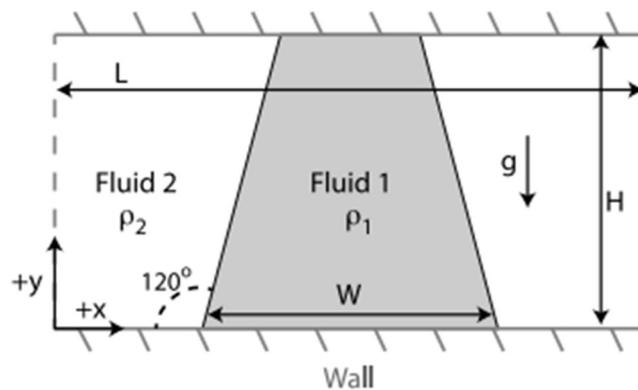


Figura 4.17: Dominio e condizioni iniziali per la simulazione sulle linee di contatto [17].

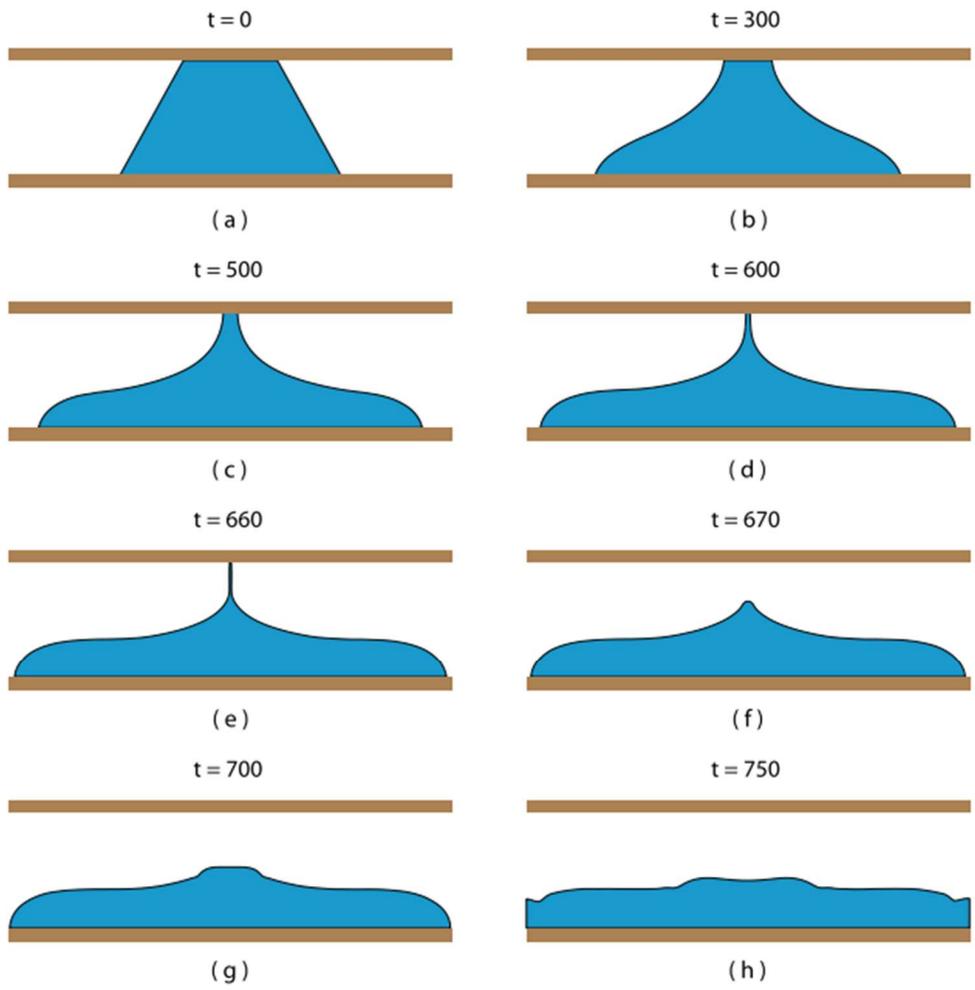


Figura 4.18: Evoluzione delle linee di contatto [17].

Capitolo 5

Conclusione

A causa degli svariati campi di applicazione del metodo level-set, in questa trattazione si è scelto di concentrarsi solo su alcuni aspetti dell'applicazione del metodo level-set.

Vi sono, tuttavia, alcuni problemi che sorgono nell'implementazione pratica dell'algoritmo [2]. Per iniziare, una reinizializzazione troppo frequente tende a generare alcuni errori nella posizione del fronte, che possono portare ad inesattezze e risultati non fisici. Inoltre, viene spesso riscontrato che il metodo non conserva accuratamente la massa di ogni fluido, a differenza di altre tecniche di tracciamento delle interfacce, come il metodo volume-of-fluid. Un'ulteriore preoccupazione potrebbe essere la formazione di correnti parassite. Facciamo dunque un accenno ad alcuni recenti sviluppi del metodo level-set, proposti per far fronte ad alcune problematiche, tra cui quelle appena esposte. Un modo estremamente preciso per reinizializzare la funzione level-set è stato introdotto e sviluppato da Chopp [19] e si basa sull'uso di spline bi-cubiche. Invece, ad opera di Zhao et al. [20] è stata sviluppata una tecnica level-set per flussi multifase dove le equazioni del moto possono essere dedotte da una formulazione variazionale. Il fatto che due fasi non possano occupare la stessa posizione fisica è stato incorporato come vincolo. L'idea è stata applicata allo studio del comportamento di bolle e gocce [21], considerando solo gli effetti di tensione superficiale; questa approssimazione è valida solo nel caso in cui la tensione superficiale domini su tutte le altre forze, come l'inerzia del fluido e la viscosità.

Per quanto riguarda la non-conservazione della massa, una soluzione recente si trova nella proposta di Bourlioux [22] e Sussman & Puckett [23], che prevede un accoppiamento tra il metodo level-set con il metodo volume-of-fluid. Quest'ultimo, usato anche per il tracciamento delle interfacce, garantisce la conservazione della massa; tuttavia, può generare delle bolle spurie e gocce (dette relitti) non fisiche. Inoltre, la ricostruzione dell'interfaccia a partire dalle frazioni di volume non è semplice, e il calcolo geometrico di quantità come la curvatura non è immediato come per il metodo level-set. La versione che prevede l'accoppiamento dei due metodi conserva perfettamente la massa, come il volume-of-fluid, ma evita la creazione di gocce o bolle artificiali. Inoltre, gli effetti di tensione superficiale sono molto più semplici da incorporare.

Nonostante le varie problematiche che possono presentarsi nell'applicazione del metodo level-set nella sua versione originaria, dagli esempi analizzati e dai risultati esposti nella nostra trattazione, è evidente che il metodo si dimostra molto efficace nel garantire l'accuratezza delle soluzioni, anche in presenza di fusioni, separazioni e forme complesse. Inoltre, la sua

implementazione resta alquanto semplice: la rappresentazione implicita dell'interfaccia evita il calcolo diretto della posizione della stessa ad ogni istante (che sarebbe decisamente dispendioso in termini computazionali) e garantisce il calcolo immediato di quantità geometriche (come versore normale e curvatura locali), a differenza di altri metodi per il tracciamento delle interfacce. In conclusione, ribadiamo la vastità di campi di applicazione per il metodo level-set, che dunque risulta, oltre che utile e notevolmente efficiente, anche estremamente adattabile a qualsiasi problema, fluidodinamico e non, che coinvolga un'interfaccia in movimento.

Riferimenti bibliografici

- [1] Gibou, Frederic, Ronald Fedkiw, and Stanley Osher. "A review of level-set methods and some recent applications." *Journal of Computational Physics* 353 (2018): 82-109.
- [2] Sethian, James A., and Peter Smereka. "Level set methods for fluid interfaces." *Annual review of fluid mechanics* 35.1 (2003): 341-372.
- [3] Luo, Jian, X. Y. Hu, and Nikolaus A. Adams. "A conservative sharp interface method for incompressible multiphase flows." *Journal of Computational Physics* 284 (2015): 547-565.
- [4] Cyril W. Hirt, Billy D. Nichols, Volume of fluid (VoF) method for the dynamics of free boundaries, *Journal of Computational Physics* 39(1) (1981) 201–225.
- [5] Salih Ozen Unverdi, Gratar Tryggvason, A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows, *Journal of Computational Physics* 100(1) (1992) 25–37.
- [6] Osher SJ, Sethian JA. "Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations." *Journal of Computational Physics* 79 (1988): 12–49
- [7] Sussman M, Smereka P, Osher SJ. "A level set approach to computing solutions to incompressible two-phase flow." *Journal of Computational Physics* 114 (1994): 146–59.
- [8] Christopher E. Brennen, "Fundamentals of Multiphase Flow." *Cambridge University Press* (2005).
- [9] Van der Pijl, S. P., et al. "A mass-conserving level-set method for modelling of multi-phase flows." *International journal for numerical methods in fluids* 47.4 (2005): 339-361.
- [10] R. Arina, "Fondamenti di Aerodinamica." *Levrotto e Bella* (2015).
- [11] Kang M, Fedkiw RP, Liu X-D. "A boundary condition capturing method for multiphase incompressible flow." *Journal of Scientific Computing* (2000); 323 – 360.
- [12] Li Z, Lai M-C. "The immersed interface method for the Navier–Stokes equations with singular forces." *Journal of Computational Physics* 171 (2001):822 – 842.
- [13] Nagrath, Sunitha, Kenneth E. Jansen, and Richard T. Lahey Jr. "Computation of incompressible bubble dynamics with a stabilized finite element level set method." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194.42-44 (2005): 4565-4587.
- [14] Brackbill J.U., Kothe D.B., Zemach C. "A continuum method for modeling surface tension". *Journal of Computational Physics* 100 (1992) 335–354.
- [15] Grace J.R. "Shapes and velocities of bubbles rising in infiite liquids" *Trans. Inst. Chem. Engrg.* 51 (1973) 116–120.
- [16] Chakraborty, I., G. Biswas, and P. S. Ghoshdastidar. "A coupled level-set and volume-of-fluid method for the buoyant rise of gas bubbles in liquids." *International Journal of Heat and Mass Transfer* 58.1-2 (2013): 240-259.

- [17] Della Rocca, G., and Guillaume Blanquart. "Level set reinitialization at a contact line." *Journal of Computational Physics* 265 (2014): 34-49.
- [18] Alfonso A. Castrejon-Pita, J.R. Castrejon-Pita, I.M. Hutchings. "Breakup of liquid filaments." *Phys. Rev. Lett.* 108 (7) (2012) 074506.
- [19] Chopp DL. "Some improvements of the fast-marching method. " *SIAM J. Sci. Comput.* 23 (2001): 230–44
- [20] Zhao, Hong-Kai, et al. "A variational level set approach to multiphase motion." *Journal of computational physics* 127.1 (1996): 179-195.
- [21] Zhao HK, Merriman B, Osher SJ, Wang L. "Capturing the behavior of bubbles and drops using the variational level set approach. " *Journal of computational physics* 127 (1998):495–518
- [22] Bourlioux A. "A coupled level-set volume-of-fluid for tracking material interfaces. " *In Proc. Int. Symp. Comput. Fluid Dyn, 6th, Lake Tahoe* (1995), pp. 15–25
- [23] Sussman M, Puckett EG. "A coupled level set and volume-of-fluid method for computing 3D and axisymmetric incompressible two-phase flows. ". *Journal of computational physics* 162 (2000): 301– 37