

POLITECNICO DI TORINO

Corso di laurea in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di laurea triennale

Analisi del flusso turbolento in un canale piano attraverso la teoria delle reti complesse



Relatore

prof.ssa Stefania SCARSOGLIO

Correlatore

ing. Giovanni IACOBELLO

Candidato

Michele Pio SAVINO

OTTOBRE 2018

Questo lavoro è soggetto alla Creative Commons Licence.

Dichiaro sotto la mia personale responsabilità di avere rispettato tutte le leggi relative alla proprietà intellettuale e di copyright di tutti i brani citati.

Torino, 9 ottobre 2018

Michele Pio SAVINO

.....

Sommario

Nel lavoro si analizzano le serie temporali di velocità nel canale piano in due configurazioni che differiscono per il parametro adimensionale Re_τ . L'analisi è effettuata attraverso l'algoritmo di visibilità orizzontale e il successivo calcolo mediato di opportune metriche delle reti da esso generate.

Indice

Elenco delle figure	VIII
Elenco dei codici	IX
Introduzione	1
1 Cenni sulla turbolenza	5
1.1 Caratteristiche	5
2 Metodi	7
2.1 Database e configurazione	7
2.1.1 Database JHTDB (1000)	8
2.1.2 Database 180	10
2.2 Teoria delle reti complesse	11
2.2.1 Definizioni e notazioni	12
2.2.2 Metriche	13
2.3 L'algoritmo di visibilità orizzontale	16
2.3.1 Descrizione dell'algoritmo	16
2.4 Costruzione delle reti	19
3 Risultati	21
3.1 Legame tra serie temporali e metriche	21
3.1.1 Effetto delle irregolarità	22
3.1.2 Effetto dei picchi	24
3.1.3 Effetto combinato	24
3.2 Confronto tra i database	26
3.2.1 Legami tra fluidodinamica e metriche	26
3.2.2 Legami tra serie turbolente e metriche	30
3.2.3 Ulteriori considerazioni	38
Conclusioni	41

A Codici	43
A.1 Implementazione dell'algorithm di visibilità orizzontale	43
A.2 Calcolo delle metriche	47
Riferimenti bibliografici	53

Elenco delle figure

2.1	Canale piano.	8
2.2	Flusso turbolento nel canale	9
2.3	Esempio di grafo	11
2.4	Community	15
2.5	Esempio illustrativo dell'algoritmo di visibilità orizzontale	17
2.6	Distribuzioni teoriche del grado e del coefficiente di clustering	18
3.1	Algoritmo di visibilità orizzontale applicato alla serie temporale della funzione coseno	23
3.2	Grafi corrispondenti alle serie temporali del coseno	25
3.3	Metriche globali mediate per $Re_\tau = 1000$ in funzione di y^+	26
3.4	Comportamento della mean link-length nelle 3 posizioni S_z per $Re_\tau = 1000$	27
3.5	Metriche globali mediate per $Re_\tau = 180$ in funzione di y^+	28
3.6	Andamento della velocità adimensionale U^+ in funzione della distanza y^+	29
3.7	Serie temporali di u per $Re_\tau = 1000$	31
3.8	Serie temporali di u per $Re_\tau = 180$	32
3.9	Confronto tra i coefficienti di clustering globale \tilde{C}	32
3.10	Confronto tra le mean link-length \tilde{d}_{ln}	33
3.11	Modularity \tilde{Q} in funzione della distanza y^+	34
3.12	Reti estratte dalle serie di Figura 3.7.	35
3.13	Reti estratte dalle serie di Figura 3.8.	35
3.14	Distribuzioni cumulative del grado, \tilde{P}_k	36
3.15	Distribuzioni cumulative del coefficiente di clustering, \tilde{P}_C	37
3.16	Distribuzioni cumulative di d_{ln} , $\tilde{P}_{d_{ln}}$	38
3.17	Andamento degli sforzi turbolenti e viscosi in un canale piano	39

Elenco dei codici

A.1	HORIZ_VISIB.M	43
A.2	ADJ_LIST2ADJ_MTRX.M	44
A.3	DEGREE_DISTRIBUTION.M	47
A.4	TRANSITIVITY.M	47
A.5	CLUSTERING_COEFF.M	48
A.6	MEAN_LINK_LENGTH.M	49
A.7	MODULARITY_150.R	50

Introduzione

LA maggior parte dei flussi fluidi che si osservano quotidianamente e che si verificano in ambito ingegneristico sono turbolenti. La turbolenza è evidente in un gran numero di fenomeni naturali, come le correnti atmosferiche e oceaniche e il flusso del sangue nel sistema circolatorio, ed è sfruttata o interviene in numerose applicazioni civili e industriali quali scambiatori di calore, turbine, reattori chimici, nelle scie di veicoli e aeroplani, ecc. . . . Data la sua ricorrenza nel mondo ingegneristico diventa fondamentale approfondirne lo studio per poterne prevedere il comportamento. Tuttavia la turbolenza, nonostante sia stata a lungo oggetto di studio, non è tuttora compresa appieno a causa della sua complessità e rimane oggi uno dei problemi più impegnativi ed uno dei pochi ancora irrisolti della fisica classica. Infatti, l'analisi di questi tipi di flusso non può essere svolta risolvendo analiticamente le equazioni di Navier-Stokes come avviene nel caso di semplici correnti laminari, ma deve essere eseguita attraverso simulazioni numeriche e/o tecniche statistiche. Con la crescente potenza dei calcolatori, questo problema è divenuto sempre più importante, facendo nascere la necessità di congiungere tecniche proprie di discipline diverse per rendere l'analisi statistica più semplice.

Una delle tecniche più recentemente applicate allo studio di fenomeni di questo genere consiste nell'analisi delle serie temporali delle grandezze che caratterizzano un flusso turbolento attraverso la teoria dei grafi e delle reti complesse, per ottenere informazioni difficilmente deducibili utilizzando altri metodi statistici. Questo approccio, a differenza delle tecniche più classiche, ha infatti l'indiscutibile pregio di evitare la perdita di informazioni sulla struttura temporale delle serie analizzate.

Tra le varie classi di flussi turbolenti sono molto importanti quelli confinati tra pareti solide poiché legati alle interazioni tra fluidi e strutture. In questo lavoro si usa la teoria delle reti complesse per analizzare la corrente turbolenta completamente sviluppata in un canale piano attraverso l'algoritmo di visibilità orizzontale. In particolare, si confrontano i risultati ottenuti in due configurazioni del canale, ovvero per due differenti valori del parametro $Re_\tau = hu_\tau/\nu$ e cioè

$Re_\tau = 1000$ e $Re_\tau = 180$. Per far ciò si è partiti da dati ottenuti numericamente tramite Direct Numerical Simulation, presi rispettivamente da un database reperibile online, il JHTDB, e da un database sviluppato presso TU Eindhoven dal gruppo del Prof. Kuerten.

Tra le varie grandezze di campo disponibili si è deciso di studiare le serie temporali della componente orizzontale u della velocità istantanea. Le serie scelte sono prese in determinate posizioni di un certo dominio. In ogni punto è stata costruita una rete tramite l'algoritmo di visibilità orizzontale, ognuna delle quali corrispondente a una determinata serie. In questo modo è possibile valutare quali proprietà delle serie sono conservate dalla rete e cioè rilevare la presenza di alcuni aspetti caratteristici della struttura temporale del flusso turbolento, quali picchi e fluttuazioni; a seconda dell'importanza delle varie irregolarità delle serie in differenti regioni del flusso si ottengono reti con differente topologia.

Per rilevare le suddette caratteristiche, si sono calcolate alcune metriche significative e, dopo averle opportunamente mediate nelle direzioni di omogeneità del flusso, si sono analizzati i loro andamenti lungo la direzione normale alla parete, prestando particolare attenzione nel tentare di legarli alla fisica del fenomeno. Infatti, specifiche combinazioni dei trend di queste metriche possono caratterizzare differenti regioni del flusso e differenti regimi.

Infine, i risultati ottenuti per le due configurazioni sono stati messi tra loro a confronto, evidenziando qualitativamente le somiglianze e le differenze tra i due regimi di flusso turbolento.

Il lavoro è organizzato in questo modo:

- Nel Primo Capitolo viene introdotto in breve il concetto di turbolenza, necessario per comprendere le analisi successive.
- Nel Secondo Capitolo, dopo una descrizione dei database da cui i dati sono stati scaricati, si forniscono alcune nozioni utili sulla teoria dei grafi e delle reti complesse e, soprattutto, si descrivono le metriche e l'algoritmo di visibilità orizzontale.
- Nel Terzo Capitolo si passa all'analisi e al confronto degli andamenti delle metriche calcolate partendo dalle serie temporali dei due database descritti, cercando di legarli il più possibile alla struttura temporale delle serie (in particolare alla ricorrenza di picchi e irregolarità) e alla fluidodinamica turbolenta del canale piano.
- A chiusura del lavoro, nelle Conclusioni si propongono alcuni commenti finali.
- Nelle Appendici sono presenti gli script e le funzioni implementati in Matlab e in R e utilizzati per ottenere i dati necessari per lo studio.

Il lavoro è basato sull'articolo di G. Iacobello, S. Scarsoglio e L. Ridolfi. «Visibility graph analysis of wall turbulence time-series». In: *Physics Letters A* **382** (2018), pp. 1–11, dove è invece utilizzato l'algoritmo di visibilità naturale per analizzare le serie temporali delle tre componenti della velocità.

Capitolo 1

Cenni sulla turbolenza

IN fluidodinamica, un *regime turbolento* è un moto di un fluido in cui le forze viscosse non sono sufficienti a contrastare quelle di inerzia, cioè un regime di moto che si verifica quando l'effetto smorzante della viscosità diminuisce. Il passaggio da regime laminare a turbolento, la cosiddetta transizione, avviene quando un certo parametro, il *numero di Reynolds* Re , supera una soglia critica, dipendente dal fenomeno in esame.

Lo stato di moto turbolento è descritto da tre equazioni differenziali, le *equazioni di Navier-Stokes*. Ciò implica che, a causa delle non linearità insite nei termini inerziali, pur essendo la dinamica deterministica, non sia possibile ottenere una soluzione analitica del campo di moto. Perciò lo studio di queste correnti è in generale molto complesso, tanto che il celebre fisico Feynman descrisse la turbolenza come «*l'ultimo problema irrisolto della fisica classica*».

Spesso, per semplificare la soluzione del problema, si decide di adottare, al posto delle variabili originarie, una loro descrizione statistica basata su espressioni mediate, con lo svantaggio di perdere informazioni sulle proprietà istantanee; ed è proprio questo che si vuole evitare attraverso l'introduzione della teoria delle reti complesse nello studio di questi fenomeni.

1.1 Caratteristiche

E' difficile dare una vera e propria *definizione di turbolenza*, ma si possono identificare alcune caratteristiche comuni a tutti i flussi di questo tipo.

- La configurazione del sistema turbolento si presenta sempre diversa con l'avanzare del tempo ed è variabile secondo una successione difficilmente prevedibile. Infatti la turbolenza è un fenomeno *instazionario* e *tridimensionale*, anche se le condizioni iniziali sono stazionarie e bidimensionali.

- Un campo di moto turbolento presenta una grande sensibilità rispetto alle condizioni iniziali: una loro piccola modifica può far cambiare completamente il risultato finale.
- E' caratterizzata dalla presenza di fluttuazioni irregolari e caotiche sia temporali che spaziali.
- Coinvolge molteplici scale geometriche che assumono la forma di strutture vorticose dette *eddy*; però manca una netta separazione tra le scale che permetta di trattare l'effetto della fluttuazione come un fenomeno puramente locale. Le grosse strutture hanno dimensioni paragonabili a quelle caratteristiche del fenomeno in esame e trasferiscono la loro energia a strutture più piccole, che diventano sempre più dissipative e le cui dimensioni diminuiscono con l'aumentare di Re . Il rapporto tra le due scale è dell'ordine del numero di Reynolds. Il processo di trasferimento dell'energia è detto *cascata inerziale* ed è dovuto alla presenza di *vorticità* tridimensionale ($\nabla \times V \neq 0$) e, in particolare, al *vortex stretching*. Il massimo della dissipazione si realizza vicino a parete, dove i gradienti di velocità sono così alti che gli sforzi viscosi causano la trasformazione di energia cinetica in calore. La transizione è quindi un problema di stabilità. I vortici più grandi sono instabili e tendono a decadere trasferendo energia a quelli più piccoli.
- E' fortemente *dissipativa*: se non c'è una fonte esterna di energia che mantiene il moto turbolento, esso decade.
- Il moto turbolento è altamente *diffusivo*, cioè i fenomeni di trasporto sono molto incrementati rispetto al caso laminare, perché le fluttuazioni causano un rapido trasferimento di massa, quantità di moto e calore. Questa è una proprietà di fondamentale importanza in molte applicazioni ed è sfruttata, ad esempio, nei reattori chimici per il mescolamento di fluidi o nel trasferimento del calore.

Riassumendo, è possibile definire la turbolenza come «*un moto fluido caratterizzato da vorticità tridimensionale, non stazionaria che interagisce non linearmente*»¹.

¹R. Arina. *Fondamenti di Aerodinamica*. A cura di Levrotto & Bella. 2015

Capitolo 2

Metodi

IN questo capitolo si introducono la metodologia utilizzata per lo studio delle serie temporali di velocità e i fondamenti teorici che ne sono alla base. Innanzitutto si descrivono la configurazione geometrica analizzata e i database dai quali i dati sono stati estratti, con una serie di informazioni essenziali per la spiegazione dei risultati finali esposti nel capitolo successivo. In seguito si danno brevi cenni sulla teoria dei grafi e delle reti complesse, per introdurre la terminologia e le notazioni utilizzate nel resto del lavoro. Importante è la descrizione delle metriche usate per determinare le caratteristiche topologiche dei grafi. Infine si parla dell'algoritmo di visibilità orizzontale, elemento cardine della trattazione, specificandone funzionamento e proprietà, e di come le reti basate sulle serie temporali della velocità di un flusso turbolento siano state costruite.

2.1 Database e configurazione

La configurazione geometrica studiata è quella del *canale piano* (Figura 2.1), costituito da due pareti parallele poste a distanza $2h$ nella direzione y e infinitamente estese nelle direzioni x e z .

I dati utilizzati sono estratti da database di *DNS* (Direct Numerical Simulation) di flussi di canale piano completamente sviluppati. DNS significa che le equazioni di Navier-Stokes sono risolte numericamente senza utilizzare alcun modello di turbolenza. Tutte le scale temporali e spaziali, dalle scale integrali a quelle dissipative, sono risolte utilizzando le appropriate condizioni iniziali ed al contorno. Questo metodo costituisce l'approccio più semplice alla risoluzione delle equazioni di N.S., ma ha dei limiti; infatti, a causa della loro complessità, richiede un elevatissima potenza di calcolo e non può essere usato per risolvere

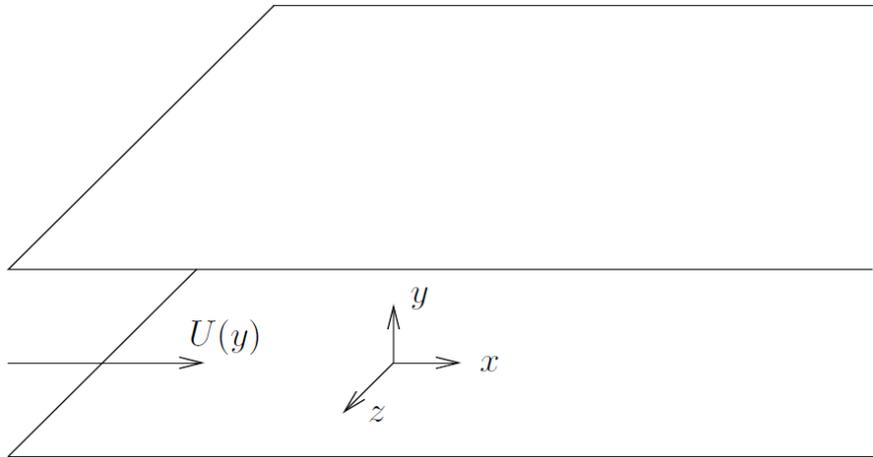


Figura 2.1: Canale piano.

flussi troppo complessi, viste le limitate prestazioni della maggior parte dei calcolatori oggi disponibili. Il costo computazionale è molto alto anche per bassi numeri di Reynolds, crescendo come Re^3 . Perciò le DNS sono utilizzate per risolvere numericamente semplici configurazioni, quali flussi omogenei isotropi o il suddetto flusso di canale piano; inoltre sono sfruttate per studiare la turbolenza a fini di ricerca, potendo ricreare condizioni necessarie per studi teorici non riproducibili in laboratorio o in galleria del vento a causa della geometria.

Le due simulazioni analizzate sono eseguite risolvendo numericamente le Navier-Stokes incompressibili rispettivamente a $Re_\tau = 1000$ e $Re_\tau = 180$, dove

$$Re_\tau = \frac{hu_\tau}{\nu}$$

è il numero di Reynolds definito con la velocità di attrito, u_τ , h è la semi-altezza del canale e ν è la viscosità cinematica.

Tutti i parametri fisici introdotti finora e in seguito sono in unità adimensionali.

Lo studio è stato condotto sulle serie temporali della componente orizzontale u della velocità in sottoinsieme dei due domini considerati; infatti il campo di u risulta essere il più elementare e significativo per analizzare una corrente turbolenta. I valori di velocità sono stati estratti dai due database descritti nei successivi due paragrafi.

2.1.1 Database JHTDB (1000)

I dati della simulazione a $Re_\tau = 1000$ sono disponibili online nel *Johns Hopkins Turbulence Database* [3], database ad accesso libero dal quale è possibile ottenere i campi di velocità e pressione, punto per punto ed istante per istante,

nella configurazione di canale piano per un flusso incompressibile. L'accesso al database è possibile tramite una interfaccia web o via software, con librerie sviluppate per molti linguaggi di programmazione. Una volta scaricati, i dati sono stati processati con una serie di script in Matlab.

I parametri di questo set di dati sono:

$$\begin{aligned} h &= 1 \\ \nu &= 5 \cdot 10^{-5} \\ U_b &= 1 \\ u_\tau &= 4.9968 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

dove U_b è la velocità media nel canale. Condizioni al contorno di periodicità sono imposte nelle direzioni x e z , mentre l'aderenza è imposta sulle pareti inferiore e superiore, di coordinate adimensionali $y/h = \pm 1$. La periodicità è usata perché si considera che il moto delle particelle fluide che entrano nel dominio sia statisticamente non correlato al moto di quelle che ne escono. La simulazione, una volta raggiunte condizioni statisticamente stazionarie, è stata portata avanti per un intervallo di tempo $t \in [0,26]h/U_b$ ed i dati sono stati acquisiti con intervalli $\delta t = 0.0065$, per un totale di $N_t = 4000$ istanti. Le dimensioni del dominio fisico sono $(L_x \times L_y \times L_z) = (8\pi h \times 2h \times 3\pi h)$ e i dati sono memorizzati su una griglia di dimensioni $(N_x \times N_y \times N_z) = (2048 \times 512 \times 1536)$.

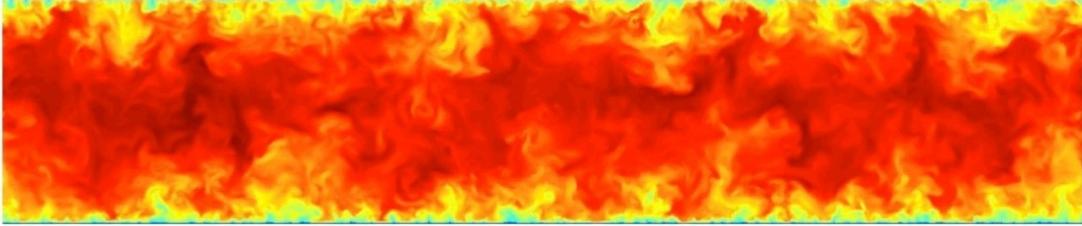


Figura 2.2: Flusso turbolento nel canale, dal sito web del JHTDB [4].

Per questo valore di Re_τ lo studio è stato condotto su un sottodominio di dimensioni $(S_x \times S_y \times S_z) = (64 \times 70 \times 3)$. La scelta è basata su quella dell'articolo di Iacobello, Scarsoglio e Ridolfi [1], dove è studiato un sottodominio più esteso in direzione z . Vista la simmetria, sono stati considerati solo i punti della griglia compresi tra la parete inferiore e l'asse del canale, ovvero quelli per cui $-1 \leq y/h \leq 0$. Le metriche analizzate nel seguito sono però riportate in funzione della distanza adimensionale

$$y^+ = \left(\frac{y}{h} + 1 \right) Re_\tau$$

che varia tra 0 e 10^3 . Per maggior chiarezza, il punto $Y = 0$ corrisponde a $y/h = -1$ e cioè a $y^+ = 0$. La distanza tra i punti della griglia cresce gradualmente dalla parete verso il centro in direzione y , essendo più fine vicino al bordo dove il flusso è fortemente disomogeneo a causa dei vortici delle piccole scale di dissipazione. In direzione x la spaziatura adottata è invece uniforme e più rada, essendo il flusso statisticamente omogeneo avanzando lungo il canale; lo stesso vale in direzione z , nella quale si sono considerati solo 3 frame uniformemente spaziatati. In definitiva sono stati analizzati $(64 \times 70 \times 3)$ punti, in ognuno dei quali la velocità è stata campionata in 4000 istanti.

2.1.2 Database 180

I parametri della DNS a $Re_\tau = 180$ [10], sviluppata dal gruppo del Prof. Kuerten presso TU Eindhoven, sono:

$$\begin{aligned} h &= 1 \\ \nu &= 1/180 \\ u_\tau &= 1 \\ t &\in [0, 1.25] \\ \delta t &= 0.00025 \\ N_t &= 5000 \end{aligned}$$

Le coordinate fisiche in questa configurazione sono date dalla legge:

$$y = 1 - \cos \frac{(s-1)\pi}{192}$$

con $s \in [2, 97]$; la distanza adimensionale è qui definita come

$$y^+ = \frac{y}{h} Re_\tau$$

Per questo valore di Re_τ il sottodominio analizzato è su una griglia di dimensioni $(S_x \times S_y \times S_z) = (144 \times 96 \times 3)$. Per il resto, considerazioni analoghe a quelle del paragrafo precedente valgono anche per questo set di dati.

In definitiva sono stati analizzati $(144 \times 96 \times 3)$ punti, in ognuno dei quali la velocità è stata campionata in 5000 istanti.

2.2 Teoria delle reti complesse

Molti sistemi reali sono composti da un grande numero di elementi strettamente interconnessi che si influenzano reciprocamente: questo vale, ad esempio, per sistemi chimici, per le interazioni tra individui, per le reti neurali, per il World Wide Web. Questi sistemi, per quanto diversi tra loro, possono essere schematizzati da *grafi*, ovvero strutture matematiche discrete nelle quali gli elementi sono rappresentati da punti, detti *nodi* o *vertici*, e le interazioni tra loro attraverso delle linee che li collegano, dette *lati* o *archi*. L'analisi di reti di dimensioni sempre maggiori, grazie alla crescente potenza dei calcolatori moderni, ha permesso agli scienziati di capire che i sistemi reali presentano alcuni principi unificatori e delle proprietà topologiche in comune: ad esempio, la distribuzione dei gradi dei nodi segue una legge di potenza o presi due nodi qualsiasi in media è possibile trovare un cammino relativamente breve che li collega oppure la presenza di raggruppamenti o di schemi prevedibili.

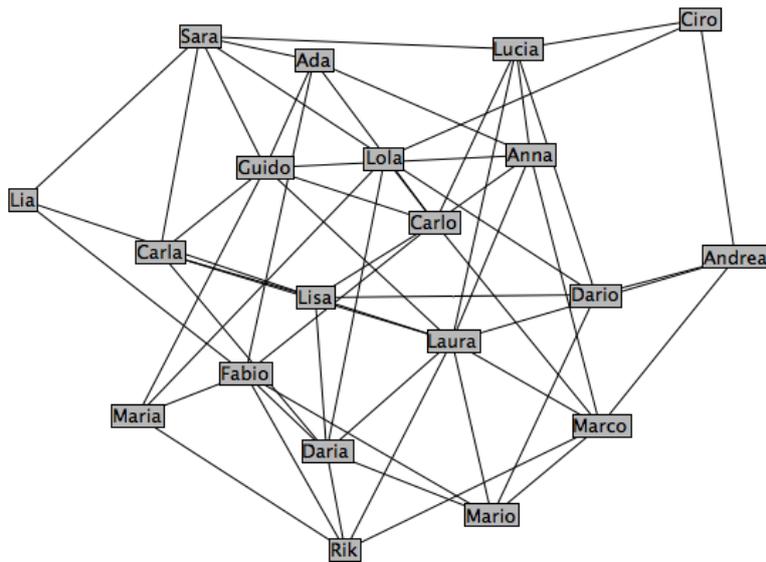


Figura 2.3: Esempio di un grafo che rappresenta un social network.

In particolare, negli ultimi anni, la *teoria delle reti complesse* è stata utilizzata per l'analisi di serie temporali, convertendo queste ultime in grafi. Infatti, è stato provato che queste reti ereditano alcune delle peculiarità della serie da cui derivano. Questo lavoro è appunto basato sull'ipotesi che alcune specifiche caratteristiche del moto turbolento nel canale siano riflesse nella topologia delle reti generati dall'algoritmo di visibilità orizzontale. Questa approssimazione fornisce una rappresentazione del sistema turbolento semplice ma comunque

ricca di informazioni. Si auspica perciò che le reti complesse possano essere una utile alternativa ai metodi statistici più classici per lo studio della turbolenza.

2.2.1 Definizioni e notazioni

Prima di introdurre l'algoritmo di trasformazione, si forniscono alcune nozioni e definizioni generali della teoria delle reti complesse, utili per inquadrare i grafi descritti in seguito.

Un grafo è definito formalmente come $G = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$, dove \mathcal{N} è un set di nodi e \mathcal{L} un insieme di archi. Una rete complessa è *un grafo con caratteristiche non banali*, derivante da un sistema reale che di solito comprende migliaia o milioni di nodi. Da questo punto in poi le espressioni *rete complessa* e *grafo* si usano come sinonimi.

Due nodi collegati da un lato sono definiti *adiacenti*. Ogni nodo può essere identificato da un numero intero i e ogni lato da una coppia (i, j) . Si assume che non esistano archi che collegano un nodo a se stesso oppure archi multipli, ovvero più di una connessione tra gli stessi due nodi.

Un grafo è detto:

- *non pesato*, se tutti i lati hanno lo stesso peso, cioè non ci sono priorità nelle correlazioni;
- *non orientato*, se gli archi non hanno direzione, ovvero la connessione dal nodo i verso il nodo j ha lo stesso significato di quella da j verso i ;
- *connesso*, se esiste un percorso che collega ogni possibile coppia di nodi.

Un concetto fondamentale è quello di raggiungibilità di due nodi. Un *percorso* tra i nodi i e j consiste in una sequenza di nodi adiacenti che inizia nel nodo i e termina in j , caratterizzata dal fatto che nessun nodo è visitato più di una volta. La sua lunghezza è il numero di nodi della sequenza. Un *ciclo* è un percorso chiuso.

Un *sottografo* $G' = (\mathcal{N}', \mathcal{L}')$ di G è un grafo tale per cui $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N}$ e $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$. Se G' contiene tutti i lati che escono dal nodo i , allora è detto *sottografo indotto dal nodo i* , G_i .

Un grafo può essere rappresentato tramite una matrice quadrata di dimensioni $N \times N$, dove N è la cardinalità di \mathcal{N} , detta *matrice di adiacenza*, A_{ij} . L'elemento generico $A_{ij} = 1$ se i nodi i e j sono connessi, $A_{ij} = 0$ altrimenti. Per grafi non orientati la matrice di adiacenza è simmetrica e, non essendoci elementi connessi a se stessi, i termini A_{ii} sulla diagonale sono nulli.

Per approfondimenti e precisazioni si rimanda a Boccaletti et al. [5].

2.2.2 Metriche

Di seguito sono elencate le metriche utilizzate per descrivere la struttura delle reti. Esse sono tratte da [1, 5, 6]. Una *metrica* è un parametro per esprimere le proprietà topologiche di una rete. Si possono definire metriche *locali*, se associate al singolo nodo, e metriche *globali*, se relative all'intero grafo.

- Il grado (*degree centrality*), k_i , di un nodo è il numero dei suoi nodi adiacenti ed è definito come:

$$k_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} \quad (2.1)$$

E' un indicatore dei vertici più importanti della rete.

- Il grado medio (*average degree centrality*), $\langle k \rangle$, della rete è allora:

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i = \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N A_{ij} \quad (2.2)$$

- La frazione dei nodi che hanno grado k , che rappresenta anche la probabilità che un nodo scelto casualmente abbia grado k , è definita distribuzione del grado (*degree distribution*), p_k . E' anche utile definire la sua cumulativa (*cumulative degree distribution*), P_k , che rappresenta la probabilità di trovare un nodo nel grafo con grado maggiore o uguale a k .

$$P_k = \sum_{k'=k}^{\infty} p_{k'} \quad (2.3)$$

Si preferisce usare P_k perché si hanno meno fluttuazioni statistiche nella coda rispetto a p_k .

- La *transitivity*, Tr , è una metrica globale che misura quanto i nodi di una rete tendano ad essere connessi tra loro. E' definita come:

$$Tr = \frac{3N_{\Delta}}{N_{\wedge}} \quad (2.4)$$

dove N_{Δ} e N_{\wedge} sono rispettivamente il numero di triangoli e il numero complessivo di triple nella rete. Un triangolo è un insieme di tre nodi legati tra loro, mentre una tripla è un insieme di tre nodi di cui due devono essere direttamente legati al terzo. Il fattore 3 compensa il fatto che ogni triangolo contribuisce tre volte ad una tripla ed assicura che $0 \leq Tr \leq 1$.

- Il *coefficiente di clustering*, C_i , misura la probabilità che due nodi, adiacenti al nodo i , siano collegati tra loro. E' quindi una metrica locale anch'essa legata alla presenza di triangoli.

$$C_i = \frac{2e_i}{k_i(k_i - 1)} = \frac{\sum_{j,m} A_{ij} A_{jm} A_{mi}}{k_i(k_i - 1)} \quad (2.5)$$

dove e_i è il numero di archi in G_i , il sottografo indotto dal nodo i , e $k_i(k_i - 1)/2$ è il numero massimo di lati che G_i può avere. A_{ij} e A_{mi} verificano se i nodi j e m sono adiacenti al nodo i , mentre A_{jm} verifica se j e m sono legati a loro volta.

Se si media su tutti i nodi si ottiene il *coefficiente di clustering globale*, C :

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i \quad (2.6)$$

A differenza di Tr , C tende a pesare maggiormente il contributo dei vertici con grado k_i minore, ma è comunque compreso tra 0 e 1.

- Invece di mediare sui nodi, si può calcolare la loro frazione che ha un coefficiente di clustering uguale a C , ottenendo la distribuzione del coefficiente di clustering, p_C . Da qui si può ricavare la sua distribuzione cumulativa (*cumulative clustering coefficient distribution*), P_C .

$$P_C = \sum_{C'=C}^{\infty} p_{C'} \quad (2.7)$$

- La lunghezza media dei collegamenti (*mean link-length*), d_{1n} [si veda 1], è una metrica locale che misura la distanza temporale tra due vertici legati.

$$d_{1n}(i) = \frac{1}{k_i} \sum_{j \in \Gamma_i} |t_j - t_i| \quad (2.8)$$

dove Γ_i e k_i sono rispettivamente l'insieme dei nodi adiacenti al nodo i e il grado del nodo i . Ogni vertice rappresenta un istante temporale e perciò d_{1n} cresce quando un nodo è legato ad altri nodi lontani nel tempo. E' possibile mediare su tutti i nodi ottenendo una metrica globale:

$$\langle d_{1n} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_{1n}(i) \quad (2.9)$$

- Allo stesso modo in cui si sono calcolate le distribuzioni cumulative del grado e del coefficiente di clustering, è possibile calcolare quella del coefficiente d_{1n} , definita *cumulative mean link-length distribution*, $P_{d_{1n}}$.

$$P_{d_{1n}} = \sum_{d'_{1n}=d_{1n}}^{\infty} p_{d'_{1n}} \quad (2.10)$$

- La *modularity*, Q [si veda 6], è una misura di quanto una rete è divisa in raggruppamenti (*community*). E' definita come la frazione di lati in un dato gruppo meno la frazione che ci si aspetterebbe se essi fossero distribuiti casualmente. Un valore elevato della modularity (all'incirca maggiore di 0.3) indica una forte divisione in gruppi.

$$Q = \frac{1}{4m} \sum_{ij} \left(A_{ij} - \frac{K_i K_j}{2m} \right) s_i s_j \quad (2.11)$$

dove $(K_i K_j)/(2m)$ è il numero di lati atteso tra i nodi i e j se essi fossero disposti casualmente, m è il numero totale di lati nella rete, s è una variabile che permette di considerare che il grafo può essere diviso in due gruppi ($s_i = 1$ se il nodo i appartiene al gruppo 1, $s_i = -1$ se il nodo i appartiene al gruppo 2), mentre il fattore $1/(4m)$ è convenzionale.

Le *community* (o *cluster*) sono sottografi i cui nodi sono strettamente connessi, cioè coesivi. Possono essere definite come gruppi di nodi tali che da avere una maggiore densità di lati all'interno del raggruppamento che verso altri raggruppamenti. Nodi che appartengono allo stesso gruppo hanno parecchie connessioni tra loro e ciò implica una maggior facilità di trasmissione delle informazioni.

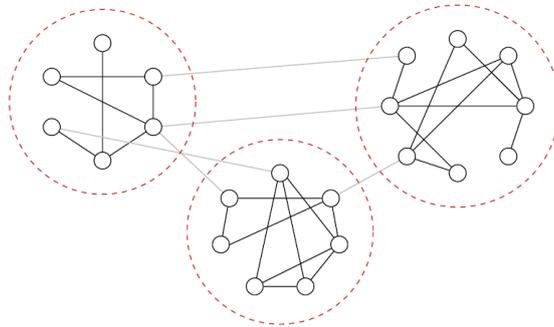


Figura 2.4: Tre community, tratto da [5]

2.3 L’algoritmo di visibilità orizzontale

Dopo aver fornito alcune informazioni essenziali sulla teoria delle reti complesse, ora si illustra il modo in cui i grafi sono stati generati. L’idea consiste nel trasformare una serie temporale in un grafo e successivamente nello studiarne la topologia per raccogliere informazioni sulla suddetta serie. Tra i vari algoritmi proposti negli anni, si è scelto di utilizzare l’*algoritmo di visibilità orizzontale* proposto da Luque et al. [7]. Questo approccio nasce come una variante, caratterizzata da un criterio di visibilità geometricamente più semplice, dell’algoritmo di visibilità naturale descritto in [8] e utilizzato per l’analisi dello stesso tipo di serie temporali in G. Iacobello, S. Scarsoglio e L. Ridolfi. «Visibility graph analysis of wall turbulence time-series». In: *Physics Letters A* **382** (2018), pp. 1–11.

2.3.1 Descrizione dell’algoritmo

Sia $\{x_i\}_{i=1,\dots,N}$ una serie temporale di N misure. Si immagini di inserirle in un grafico a barre rappresentandole come dei rettangoli. L’algoritmo associa ogni misura della serie ad un nodo del grafo generato. Due nodi i e j sono tra loro connessi se si può tracciare nel grafico a barre della serie temporale una linea orizzontale che unisca x_i e x_j senza intersecare nessun altro rettangolo nel mezzo, cioè se le altezze dei due rettangoli dei nodi i e j sono maggiori di quelle dei rettangoli tra loro. Si veda la Figura 2.5 per un chiarimento visivo su come agisce questo algoritmo.

Quindi, i nodi i e j sono adiacenti se il seguente criterio geometrico è rispettato all’interno della serie temporale:

$$x_i, x_j > x_n \quad \forall n \text{ tale che } i < n < j$$

Il grafo ottenuto mostra alcune interessanti caratteristiche, ovvero è:

- Connesso: ogni nodo vede almeno due nodi, i suoi vicini a destra e sinistra, e ciò implica che il grado minimo possibile sia $k_i = 2$.
- Non pesato e non orientato: tutti i lati sono equivalenti.
- Invariante per trasformazioni affini della serie temporale: il criterio di visibilità non cambia se si scalano entrambi gli assi orizzontale e verticale oppure se la serie è traslata orizzontalmente o verticalmente, e ciò potrebbe portare ad una perdita di informazioni nella mappatura.

Altre proprietà sono:

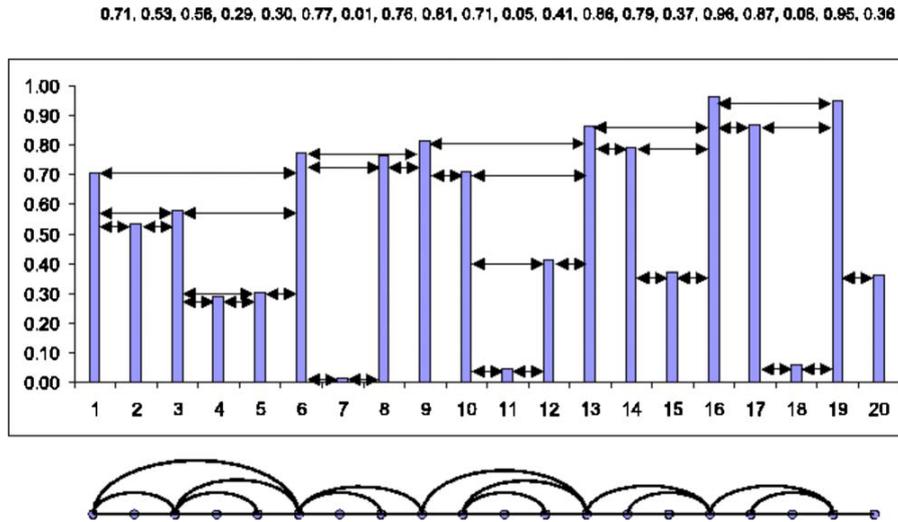


Figura 2.5: Esempio illustrativo dell’algoritmo di visibilità orizzontale, tratto da [7]. Rappresentazione della serie temporale (in alto), del grafo generato (in basso).

- L’irreversibilità della mappatura: alcune informazioni sulla serie temporale sono inevitabilmente perse poiché la struttura della rete è completamente determinata dalla matrice di adiacenza. Tuttavia l’obiettivo di questo approccio è quello di concentrarsi proprio sulla struttura della serie, più che sui singoli dati. Il problema si può risolvere banalmente utilizzando grafi pesati per rendere il grafo reversibile.
- Un criterio di visibilità più restrittivo rispetto al caso di visibilità naturale: si ottiene infatti un sottografo di quello generato dall’algoritmo di visibilità naturale; ciò non ha un impatto qualitativo sul grafo, ma ne ha uno quantitativo poiché si avranno meno statistiche e cioè meno collegamenti, rendendolo meno oneroso dal punto di vista computazionale.

Inoltre:

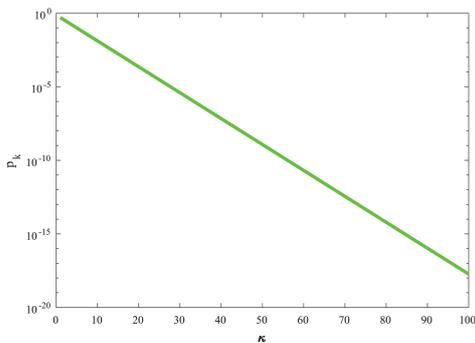
- Il grafo costruito eredita alcune proprietà dalla serie temporale: ad esempio, serie periodiche producono grafi regolari, serie casuali producono grafi esponenziali casuali.
- Grazie alla semplicità del criterio di visibilità, è possibile calcolare analiticamente, a differenza di quello che accade con l’algoritmo di visibilità naturale, il valore e l’andamento delle distribuzioni di alcune delle metriche dei grafi associati a *serie temporali caotiche*. In particolare, studiando le proprietà della visibilità orizzontale, in [7] si è dedotto che:

◇ La distribuzione del grado, p_k , ha sempre la stessa forma esponenziale:

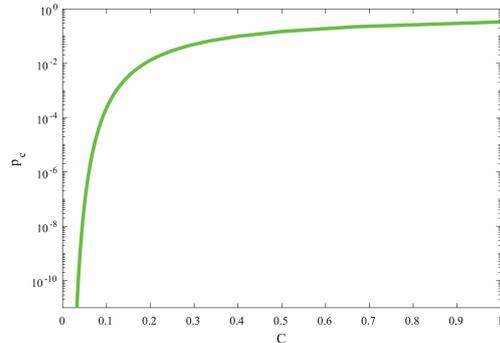
$$p_k = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \quad (2.12)$$

◇ Ogni nodo con grado k_i fa parte di $k_i - 1$ su $\binom{k_i}{2}$ possibili triangoli e quindi $C_i(k_i) = 2/k_i$. Visto che i possibili valori di C_i non variano in modo continuo, ma sono determinati da k_i , da questa relazione si può ricavare la distribuzione, anch'essa di conseguenza esponenziale, del coefficiente di clustering, p_C .

$$p_C = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{2/C-2} \quad (2.13)$$



(a) Distribuzione teorica del grado, p_k .



(b) Distribuzione teorica del coefficiente di clustering, p_C .

Figura 2.6: Grafici in scala semilogaritmica delle distribuzioni teoriche del grado e del coefficiente di clustering per un grafo generato con l'algoritmo di visibilità orizzontale da una serie temporale caotica.

Per questo lavoro, l'algoritmo è stato implementato con una funzione su Matlab, `HORIZ_VISIB.M`, consultabile nell'Appendice A.1. Questa funzione genera la lista di adiacenza relativa all'algoritmo di visibilità orizzontale partendo da una serie temporale memorizzata in un vettore. La lista è poi convertita in matrice di adiacenza attraverso la funzione `ADJ_LIST2ADJ_MTRX.M` e rappresenta il punto di partenza per il calcolo delle metriche descritte nel paragrafo 2.2.2. Per rendere il calcolo più rapido sono state sfruttate a proprio vantaggio le proprietà elencate in precedenza delle reti ottenute con questo algoritmo, in particolare la simmetria di un grafo non orientato e l'assenza di nodi connessi con se stessi (la diagonale della matrice è a valori nulli).

2.4 Costruzione delle reti

Per ogni punto nei domini considerati delle due simulazioni, si sono utilizzate le componenti u della velocità negli N_t istanti temporali per costruire le reti tramite l'algoritmo descritto. Quindi, si sono ottenute:

- 13440 reti, per $Re_\tau = 1000$;
- 41472 reti, per $Re_\tau = 180$.

Dato che l'unica direzione nella quale si verificano le disomogeneità turbolente è quella normale alle pareti, le metriche sono state assunte come statisticamente omogenee in x e z . Perciò, dopo averle calcolate per ogni singola rete, sono state mediate sul sottodominio $S_x \times S_z$, nel seguente modo:

$$\widetilde{\mathcal{F}}(Y) = \frac{1}{S_x S_z} \sum_X \sum_Z \mathcal{F}(X, Y, Z)$$

dove \mathcal{F} è la specifica metrica considerata. In questo modo le metriche mediate dipendono soltanto dalla variabile y^+ . In seguito tutti i valori mediati sono indicati con una tilde (\sim).

Capitolo 3

Risultati

NEL seguente capitolo si mettono in pratica i metodi descritti in quello precedente. Innanzitutto si descrivono quali sono le peculiarità di una serie temporale turbolenta e come esse possano essere rilevate o meno studiando i valori delle metriche ottenute dall'applicazione dell'algoritmo di visibilità orizzontale. In seguito si passa all'analisi e al confronto degli andamenti, rispetto alla distanza y^+ , delle metriche calcolate sulle reti associate alle serie temporali prese dai due database descritti nel capitolo precedente, rispettivamente a $Re_\tau = 1000$ e $Re_\tau = 180$. In particolare, si è cercato di distinguere le serie a seconda della distanza dalla parete e di legare inoltre il loro comportamento temporale alla fluidodinamica turbolenta del sistema in esame.

3.1 Legame tra serie temporali e metriche

Come detto in precedenza, la struttura di una serie temporale è preservata nella topologia del grafo di visibilità naturale ad essa associato. Si è quindi tentato di legare qualitativamente la struttura delle reti e il comportamento globale delle loro metriche alle caratteristiche delle serie temporali di partenza, e di conseguenza alla dinamica dei flussi turbolenti in esame. Ciò non si è rivelato essere particolarmente semplice, nonostante la stretta relazione tra serie e reti.

In generale, due serie temporali possono differire tra loro in molti modi, ma sicuramente ciò che le caratterizza maggiormente sono la presenza più o meno importante di picchi e irregolarità. La collocazione temporale e la ricorrenza degli eventi estremi, come i picchi, e delle fluttuazioni rappresentano infatti uno degli aspetti più importanti nei flussi turbolenti. Un punto di una serie $s(t_i)$ è detto *picco* se è un massimo locale o globale di $s(t_i)$ e se il suo valore ha un ordine di grandezza comparabile con la massima ampiezza della serie,

$\Delta = s_{max} - s_{min}$. I picchi, con questo criterio di visibilità, hanno maggior probabilità di connettersi con altri picchi molto distanti temporalmente, poiché vengono evitati tutti gli ostacoli intermedi. Allo stesso tempo, essi ostruiscono sensibilmente la visibilità dei punti nelle loro vicinanze verso altri punti lontani, agendo da barriere locali e agevolando di fatto la divisione in grosse community. Le *irregolarità* sono fluttuazioni temporali con un ordine di grandezza molto minore di Δ , che in media aumentano la visibilità locale dei punti vicini.

Per schematizzare come la ricorrenza di picchi e irregolarità influenza la topologia delle reti e soprattutto i valori delle metriche, si considera una serie temporale costruita con la funzione coseno (Figura 3.1a). Questa serie, essendo periodica, produrrà una rete regolare, cioè un grafo caratterizzato dalla ripetizione regolare dei gradi dei nodi, k_i , con il periodo della serie stessa. Per vedere poi come si modificano le metriche quando sono presenti irregolarità, si confronta la serie di partenza con una seconda nella quale si introduce un rumore casuale uniforme (Figure 3.1b - 3.1d); per capire cosa accade se si hanno picchi più ricorrenti, la si confronta con una terza nella quale si diminuisce il periodo (Figure 3.1c - 3.1d).

Guardando la Figura 3.1 si nota che, in generale, ogni nodo ha un certo numero di connessioni con nodi a brevissima distanza nel tempo e con altri nodi più lontani disposti in posizione omologa ai primi ma sulla cresta successiva, mentre non esistono connessioni intermedie. Quindi si ha solamente visibilità orizzontale a breve e lungo termine. Nella Tabella 3.1 si riportano i valori di alcune metriche calcolate per le serie temporali di Figura 3.1.

	(a)	(b)	(c)	(d)
Tr	0.452	0.393	0.471	0.401
C	0.464	0.585	0.492	0.578
d_{1n}	24.20	12.52	13.45	9.85
k	3.76	3.86	3.92	3.96

Tabella 3.1: Valori di Tr , C , d_{1n} e k per le serie temporali di Figura 3.1.

3.1.1 Effetto delle irregolarità

Nel caso in cui ci siano delle fluttuazioni, come in Figura 3.1b, le connessioni tra punti vicini in media crescono in numero rispetto a quelle con punti lontani, che invece rimangono circa costanti; ciò accade perché le irregolarità tendono ad aumentare la visibilità orizzontale locale poiché la serie non ha più un andamento uniforme anche se non presenta mai bruschi cambiamenti nel tempo.

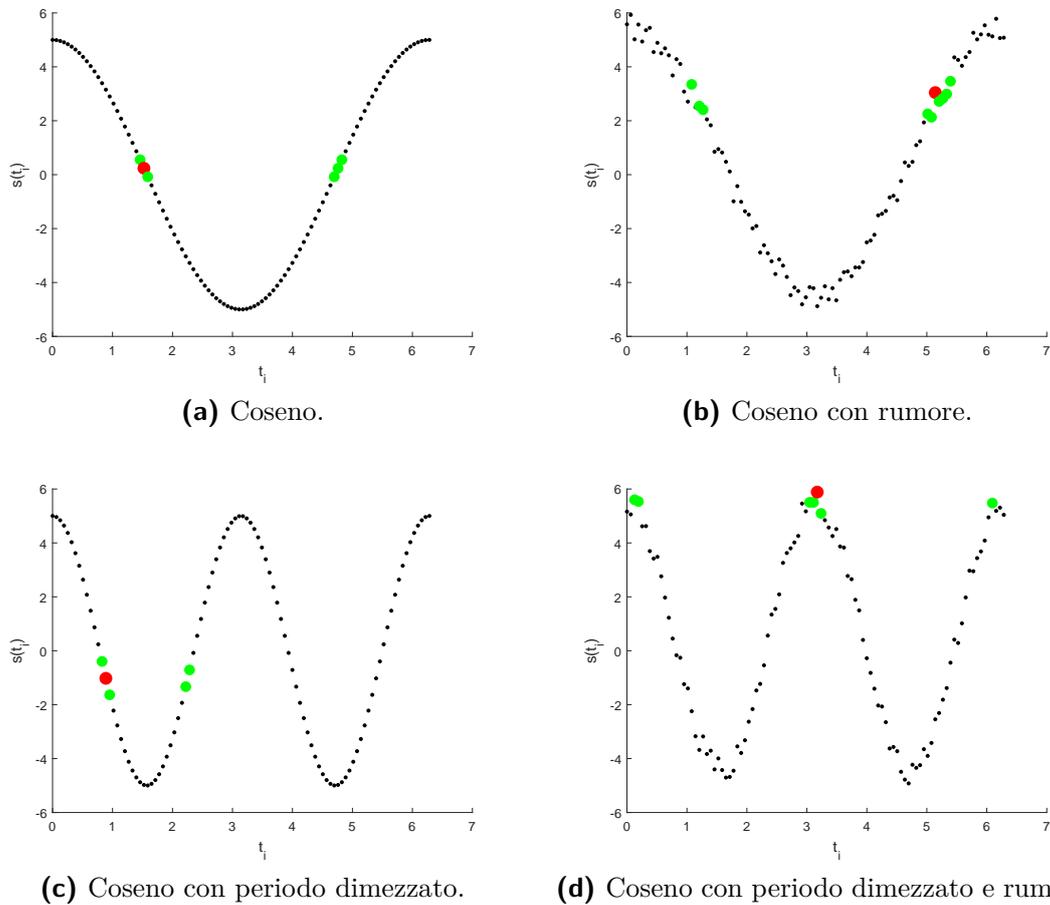


Figura 3.1: Algoritmo di visibilità orizzontale applicato alla serie temporale della funzione coseno. In ogni grafico il punto colorato in rosso indica quello con grado k_i maggiore nella serie, mentre quelli verdi rappresentano i suoi nodi adiacenti.

La prima conseguenza è che la *mean link-length*, d_{1n} , calcolata come nell'Equazione (2.8), diminuisce perché, come detto prima, il numero di connessioni tra nodi vicini aumenta ed ha ora un maggior peso rispetto a quello dei nodi lontani.

La *transitivity*, Tr , come definita nell'Equazione (2.4), è determinata dal numero totale di triple nella rete, quindi dalle dimensioni di tutti gli insiemi dei nodi adiacenti Γ_i , e dal numero di triangoli, che esistono solo se due nodi connessi al nodo i sono anche adiacenti tra loro. L'effetto delle irregolarità è quello di far crescere gli insiemi Γ_i , senza tuttavia incrementare il numero di triangoli, che dipende fortemente dall'intervisibilità tra gli insiemi Γ_i ed è più rilevante in

proporzione quando la serie è regolare. Perciò il valore della transitivity tende a diminuire di circa il 5 – 7% tra 3.1a e 3.1b e tra 3.1c e 3.1d.

Il comportamento del *coefficiente di clustering globale*, C (Equazione (2.6)), pur essendo legato anch'esso al numero di triangoli, è completamente opposto, aumentando del 7 – 10% tra 3.1a e 3.1b e tra 3.1c e 3.1d. Ciò è dovuto al fatto che il denominatore è proporzionale a k_i^2 : quindi questa metrica tende a pesare maggiormente il contributo dei vertici con k_i basso rispetto a Tr .

3.1.2 Effetto dei picchi

Quando la frequenza dei picchi aumenta, l'effetto più importante è la diminuzione della distanza temporale media tra quei nodi adiacenti che sono corrispondenti a punti appartenenti a creste successive, distanza che nel caso di Figura 3.1c viene dimezzata.

Ciò è accompagnato da un prevedibile calo, sulla base della riduzione del periodo della serie, della *mean link-length*, ma non ha invece alcun effetto sui valori di *transitivity* e *coefficiente di clustering*, che rimangono praticamente invariati, visto non ci sono cambi di regolarità e quindi i vertici presentano la stessa visibilità che avevano in partenza (Figura 3.1a), ovvero verso quelli con la stessa altezza relativa sulle creste adiacenti.

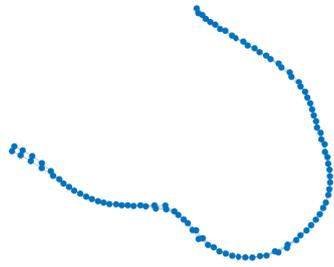
Inoltre, più picchi implicano una maggiore divisione in raggruppamenti e quindi un valore leggermente maggiore della *modularity*, Q , descritta dall'Equazione (2.11). Questo effetto è mostrato in Figura 3.2.

3.1.3 Effetto combinato

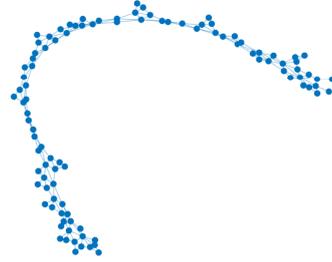
Una serie temporale può quindi differire da un'altra per una combinazione del comportamento delle metriche citate, il cui valore può crescere, decrescere o rimanere costante.

Una precisazione va fatta per la *mean link-length*. Infatti essa diminuisce sia introducendo fluttuazioni che un maggior numero di picchi. Si possono distinguere i due casi andando ad analizzare il comportamento della sua distribuzione cumulativa, che permette di capire se la frequenza dei collegamenti lunghi si è abbassata o è rimasta costante. Il primo caso corrisponde a più picchi, il secondo a una serie più irregolare, nella quale aumentano le connessioni tra nodi vicini, ma rimangono circa invariate quelle a lunga distanza.

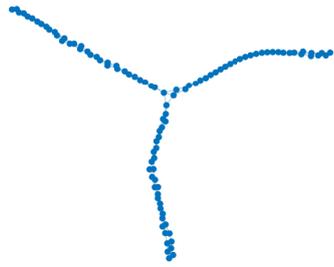
Una metrica che tiene conto sia della presenza di picchi che di irregolarità è il *grado*, k , essendo una misura diretta della visibilità dei nodi e combinando cioè le caratteristiche delle altre metriche. Tuttavia, la variazione del grado è difficile da mettere univocamente in relazione con uno specifico fattore, proprio a causa della sua definizione intrinseca (Equazione (2.2)).



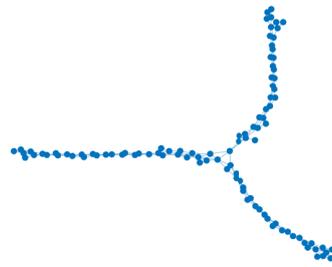
(a) Grafo del coseno.



(b) Grafo del coseno con rumore.



(c) Grafo del coseno con periodo diviso per 3.



(d) Grafo del coseno con periodo diminuito e rumore.

Figura 3.2: Grafi corrispondenti alle serie temporali del coseno di Figura 3.1. L'effetto di ogni picco è quello di creare una community dalla forma allungata, mentre le irregolarità hanno effetti trascurabili sul numero di raggruppamenti.

Come conseguenza delle precedenti osservazioni, risulta che l'algoritmo di visibilità orizzontale riesce ad evidenziare abbastanza bene la ricorrenza dei picchi, mentre per le irregolarità il discorso si fa più complesso, a causa dei comportamenti discordanti di Tr e C .

Nei termini della fluidodinamica, la transitivity e il coefficiente di clustering sono legati alla presenza di fluttuazioni locali tra picchi consecutivi mentre la mean link-length misura quanto isolati o sporadici siano gli eventi estremi.

3.2 Confronto tra i database

La procedura descritta nel paragrafo precedente è adottata per analizzare le serie temporali della componente u della velocità nelle due configurazioni di canale piano turbolento descritte nel paragrafo 2.1.

3.2.1 Legami tra fluidodinamica e metriche

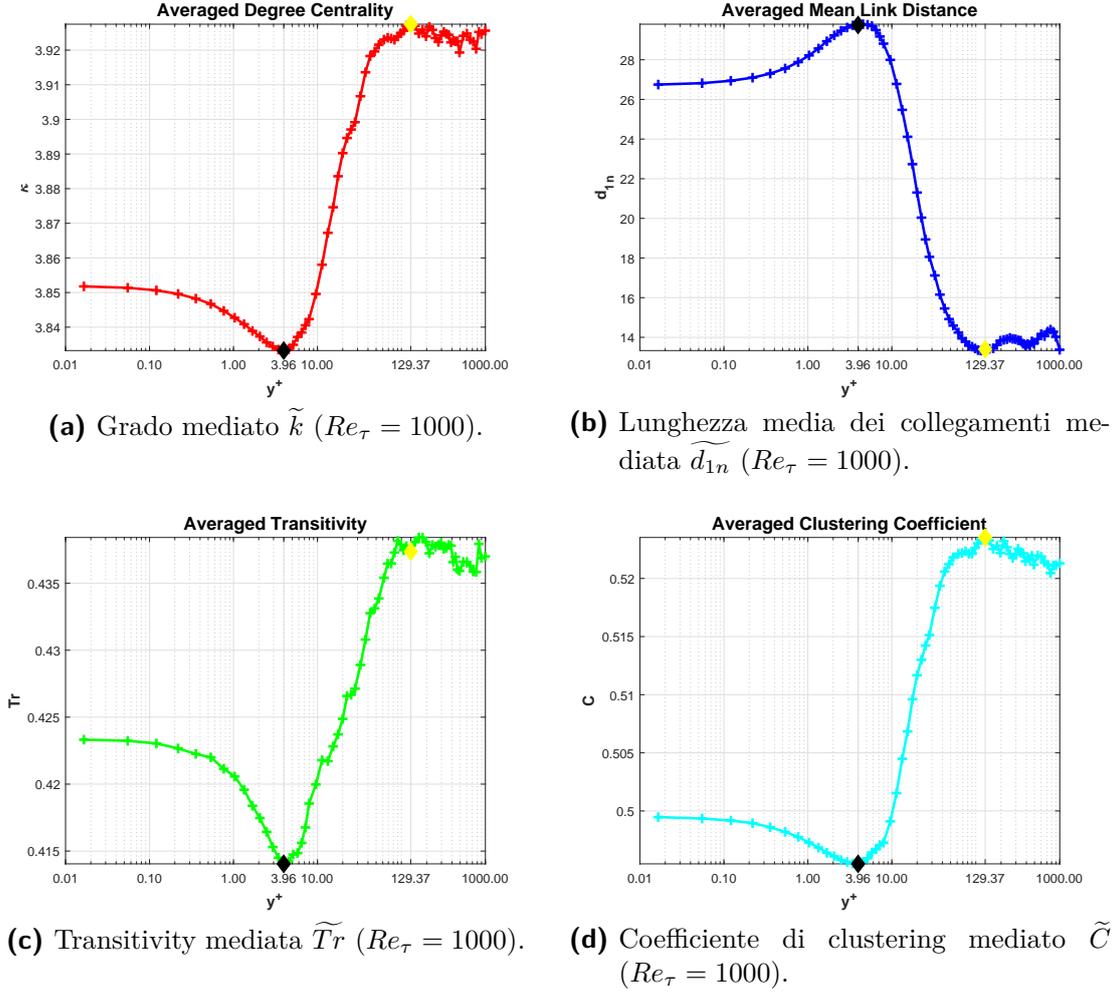


Figura 3.3: Metriche globali mediate su $S_x \times S_z$ per $Re_\tau = 1000$, espresse in funzione di y^+ , riportate in scala logaritmica sull'asse delle ascisse. In giallo e in nero sono evidenziati i punti dove l'andamento di una metrica cambia.

Nella Figura 3.3 sono riportati gli andamenti delle metriche globali mediate \tilde{k} , \tilde{d}_{1n} , \tilde{Tr} e \tilde{C} in funzione della coordinata adimensionale y^+ , calcolate per

$Re_\tau = 1000$. Si osservano variazioni consistenti di queste metriche in direzione normale alla parete, però con trend chiari e regolari. Infatti, il primo aspetto di notevole importanza consiste nel fatto che le quattro metriche hanno un comportamento simile poiché presentano punti estremanti alla stessa distanza adimensionale dalla parete. In particolare:

- in $y^+ \approx 4$, \tilde{k} , \widetilde{Tr} e \widetilde{C} hanno un minimo globale mentre \widetilde{d}_{1n} ha un massimo globale (colorati in nero);
- in $y^+ \approx 130$, \tilde{k} , \widetilde{Tr} e \widetilde{C} hanno un massimo globale mentre \widetilde{d}_{1n} ha un minimo globale (colorati in giallo).

Per $y^+ < 130$, le metriche non presentano altri evidenti massimi o minimi locali ma crescono o decrescono in maniera piuttosto regolare. Per $y^+ > 130$, invece, gli andamenti diventano notevolmente più irregolari mentre le loro variazioni divengono molto piccole, tanto che il loro valore può essere considerato all'incirca costante procedendo verso il centro del canale. Le stesse metriche, calcolate nelle posizioni S_z della griglia considerata e mediate solamente in direzione x , presentano trend molti simili a quelli di Figura 3.3. In Figura 3.4 si confronta, a titolo di esempio, la mean link-length mediata globalmente con quelle mediate solo lungo x nelle 3 posizioni S_z . I comportamenti mediate sono quindi rappresentativi della topologia di tutte le reti costruite con l'algoritmo di visibilità, poiché ogni grafo eredita l'omogeneità statistica del flusso turbolento; ciò significa che il valore mediato delle metriche lungo y^+ è statisticamente significativo.

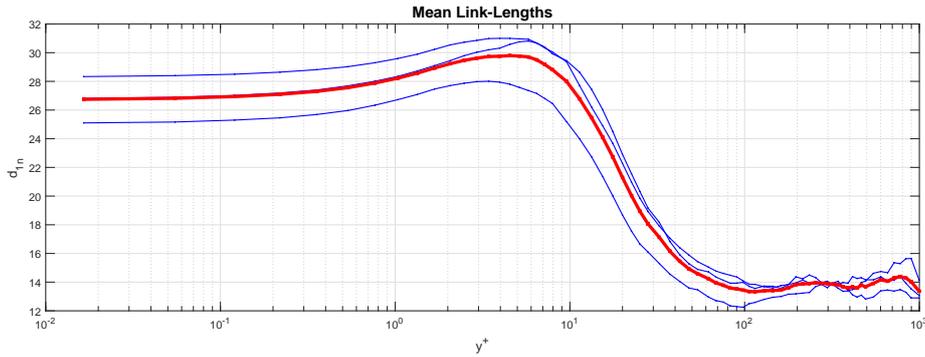


Figura 3.4: Comportamento della mean link-length, mediata solo lungo x , nelle 3 posizioni S_z (in blu) per $Re_\tau = 1000$. La linea rossa corrisponde alla metrica mediata globalmente, la stessa di Figura 3.3.

La Figura 3.5, analogamente alla figura precedente, mostra \tilde{k} , \widetilde{d}_{1n} , \widetilde{Tr} e \widetilde{C} per $Re_\tau = 180$. Anche qui \tilde{k} , \widetilde{Tr} e \widetilde{C} presentano un minimo globale e \widetilde{d}_{1n} un

massimo globale alla stessa distanza adimensionale dalla parete, ovvero $y^+ \approx 4$. Invece non si osserva un massimo globale ben definito per \tilde{k} , \tilde{Tr} e \tilde{C} (un minimo per \tilde{d}_{1n}), poiché tutte le metriche, dopo l'intervallo $4 < y^+ < 75$ in cui hanno un andamento piuttosto regolare (non è il caso di \tilde{Tr}), mostrano un trend decisamente più irregolare per $y^+ > 75 \div 80$.

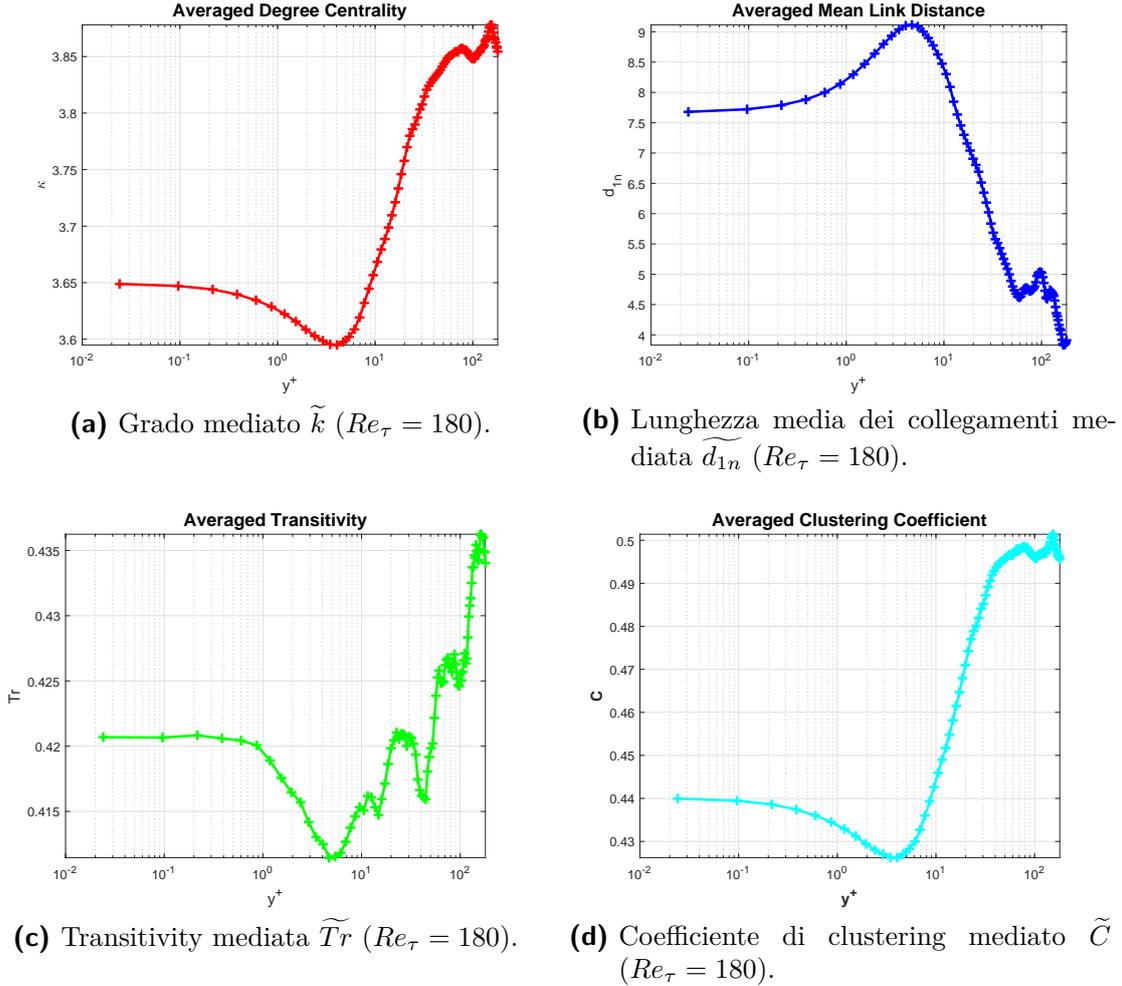


Figura 3.5: Metriche globali mediate su $S_x \times S_z$ per $Re_\tau = 180$, espresse in funzione di y^+ , riportate in scala logaritmica sull'asse delle ascisse.

Si può tentare di mettere in relazione questi trend con la fluidodinamica del fenomeno in esame, responsabile del comportamento delle serie temporali analizzate. E' davvero interessante il fatto che le posizioni del primo punto estremante siano così vicine, mentre quelle del secondo punto estremante si discostino di molto nei due casi. Ciò potrebbe significare che, per $y^+ < 4$, sia possibile

identificare una regione del flusso che non abbia una dipendenza esplicita dalla geometria, cioè da Re_τ , e che quindi presenti un carattere di universalità. Questa supposizione è confermata dai grafici in Figura 3.6, dove sono riportati gli andamenti della velocità adimensionale, U^+ , in funzione della distanza y^+ . U^+ è definita come U/u_τ , dove $U(y)$ è la media temporale della componente della velocità istantanea in direzione del flusso nel punto di coordinata y . Nei casi in esame U^+ è stata calcolata mediando su tutti i punti S_x del dominio le velocità medie u di ogni singola serie temporale, una volta scelta una determinata posizione z arbitraria; $z = 1132$ per $Re_\tau = 1000$, $z = 193$ per $Re_\tau = 180$. La regione del flusso coinvolta è il *sottostrato viscoso* (si veda Arina [2]). In questa regione di un flusso turbolento, che si estende fino ad $y^+ \ll 10$, la teoria prevede un profilo di velocità descritto dalla legge $U^+ = y^+$. In entrambi i grafici di Figura 3.6 la legge teorica è davvero molto vicina alla linea ottenuta dall'interpolazione dei valori ottenuti col calcolo mediato proprio fino ad $y^+ \approx 4$, oltre la quale le due linee iniziano a discostarsi in maniera significativa. Il sottostrato viscoso è caratterizzato da un moto molto lento del fluido mentre gli sforzi d'attrito sono prevalentemente viscosi; infatti tutte le metriche, in questa zona, cambiano poco il loro valore.

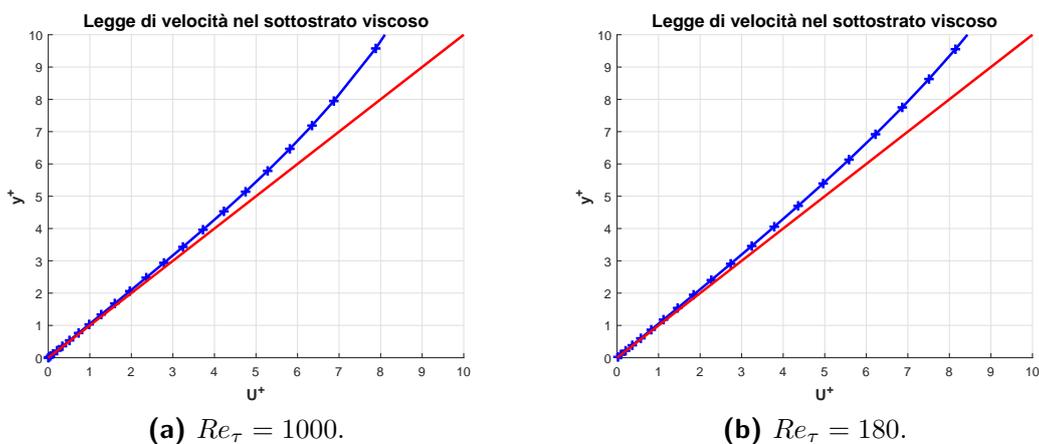


Figura 3.6: Andamento della velocità adimensionale U^+ in funzione della distanza y^+ . La linea blu rappresenta l'andamento ottenuto numericamente, la linea rossa quello teorico.

Il fatto che la posizione del secondo punto estremante sia invece compresa in un intervallo implica che non è possibile, con questo metodo, definire una regione con carattere di universalità, poiché la sua estensione dipende dal valore di Re_τ e quindi dalla geometria e dall'energia del flusso. Tuttavia, $y^+ \approx 130$ per $Re_\tau = 1000$ è davvero molto vicino al valore limite $y/h = 0.1$ dell'*inner layer*

(regione interna), che la teoria prevede estendersi fino a $y^+ \approx 100$. In questa zona il campo di moto è maggiormente influenzato dagli sforzi turbolenti di Reynolds, che sono dominanti su quelli viscosi, e la corrente fluida si organizza in schemi turbolenti coerenti. Per $Re_\tau = 180$, il limite dell'inner layer previsto dalla teoria è $y^+ \approx 18$, mentre quello che si deduce guardando solamente le metriche è $y^+ \geq 55$: i due valori sono parecchio distanti.

3.2.2 Legami tra serie turbolente e metriche

Per desumere la struttura delle serie temporali in direzione normale alla parete, si procede per y^+ crescenti, cioè dalla parete verso il centro del canale. In seguito alle considerazioni del paragrafo precedente, si concentra l'attenzione su quattro valori rappresentativi di y^+ per ognuno dei due casi:

- $y^+ = 0,055 - 3,96 - 129,4 - 996,3$ per $Re_\tau = 1000$;
- $y^+ = 0,096 - 4,06 - 61,3 - 177,1$ per $Re_\tau = 180$.

Le serie temporali della velocità u associate a questi valori di y^+ sono mostrate rispettivamente in Figura 3.7 e in Figura 3.8 e rivelano diverse caratteristiche a distanze crescenti dalla parete.

Ciò che si nota subito è il fatto che, in generale, le serie temporali a $Re_\tau = 180$ appaiono meno irregolari e più morbide; cioè, a flussi turbolenti caratterizzati da Re_τ maggiore, corrispondono maggiori fluttuazioni. Per quantificare la ricorrenza delle irregolarità si è scelto di tener maggiormente in conto l'andamento di \tilde{C} rispetto a \tilde{Tr} poiché il grado medio \tilde{k} è sempre dell'ordine delle unità (inferiore a 4) e quindi il contributo dei vertici con grado più basso non è esageratamente rilevante rispetto a quello dei vertici con grado più alto. Inoltre \tilde{Tr} tende sempre a seguire le variazioni di \tilde{C} , pur mostrando a volte dei massimi e dei minimi locali (specialmente per $Re_\tau = 180$). In Figura 3.9 viene confrontato \tilde{C} nei due casi: si nota che, a $Re_\tau = 1000$, questo coefficiente è sempre maggiore che a $Re_\tau = 180$, ma la sua escursione tra il massimo e il minimo è minore: ciò significa che, a $Re_\tau = 1000$, si hanno irregolarità in generale più ricorrenti, mentre a $Re_\tau = 180$ la loro frequenza varia molto in direzione perpendicolare alla parete. A proposito dei picchi, si confrontano gli andamenti di \tilde{d}_{1n} in Figura 3.10. La mean link-length è calcolata esprimendo la distanza temporale tra due nodi adiacenti non in termini dell'intervallo di tempo Δt , ma della variabile adimensionale:

$$\Delta t^+ = \Delta t Re_\tau u_\tau = \frac{\Delta t u_\tau^2}{\nu}$$

Si nota che questa metrica, a $Re_\tau = 1000$, è sempre maggiore che a $Re_\tau = 180$ e presenta anche un divario più grande tra massimo e minimo: ciò vuol dire

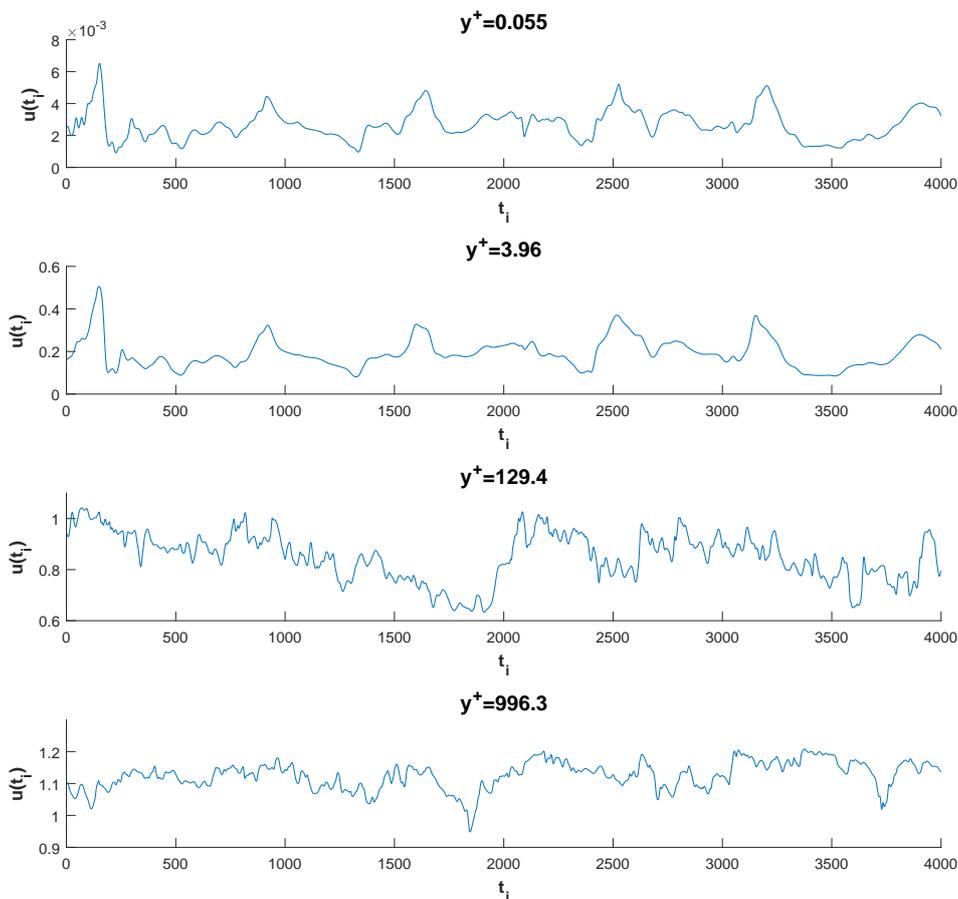


Figura 3.7: Serie temporali di u a $Re_\tau = 1000$ nel punto $x = 1377$, $z = 750$. La scelta delle coordinate nelle direzioni omogenee del flusso, x e z , è arbitraria.

che a $Re_\tau = 1000$ gli eventi estremi sono in generale meno ricorrenti ma la loro frequenza varia molto in punti a distanza diversa dal centro del canale. Quindi, in definitiva, ci si aspetta che: a $Re_\tau = 1000$ i picchi siano più vicini nel centro del canale che in prossimità della parete, mentre la ricorrenza delle irregolarità non cambi troppo tra le due regioni; a $Re_\tau = 180$ accada il contrario e cioè che le irregolarità siano più frequenti al centro, mentre la distanza tra i picchi sia non troppo diversa al variare di y^+ .

Da questo punto si procederà analizzando i comportamenti delle serie e delle metriche per i due Re_τ in parallelo e mettendo in relazione i grafici nelle Figure 3.3 e 3.7 e nelle Figure 3.5 e 3.8. A $y^+ = 0,055$ (per $Re_\tau = 1000$) e $y^+ = 0,096$ (per $Re_\tau = 180$), le serie appaiono globalmente abbastanza regolari e morbide, con variazioni temporali relativamente lente e quindi con pochi ma pronunciati picchi. Muovendosi a y^+ maggiori, \tilde{C} e \tilde{k} decrescono mentre \widehat{d}_{1n} cresce. Cioè

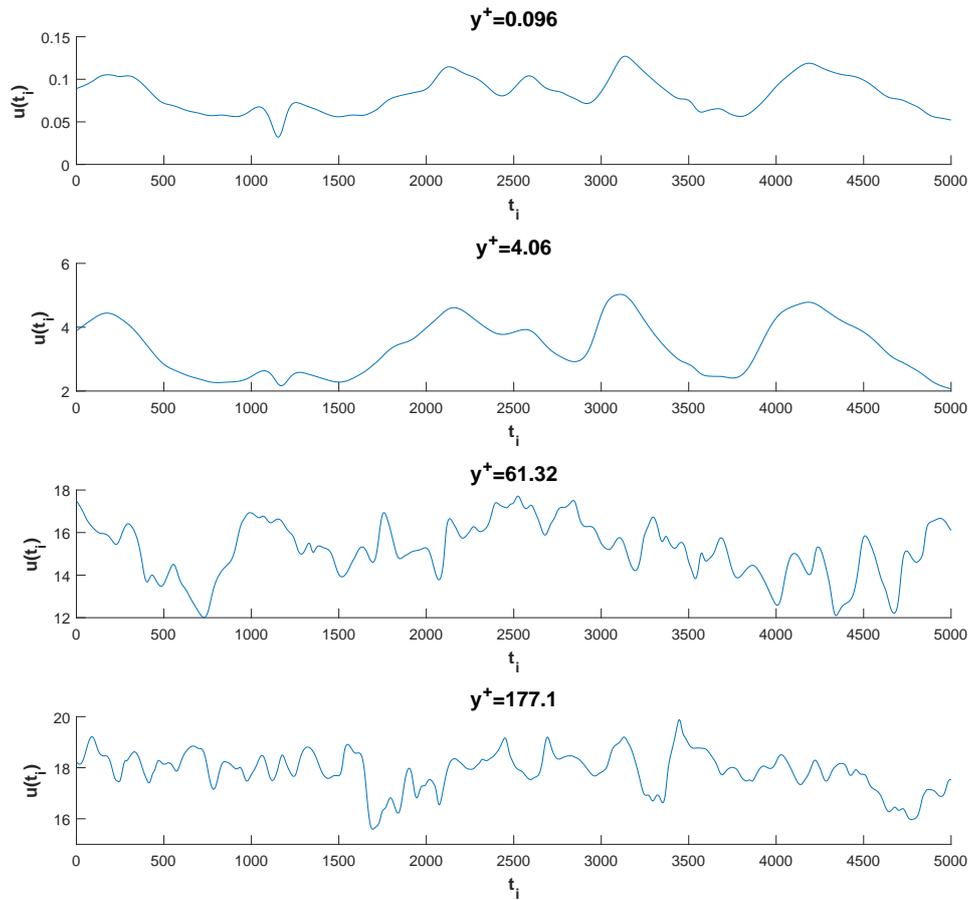


Figura 3.8: Serie temporali di u a $Re_\tau = 180$ nel punto $x = 100$, $z = 96$. La scelta delle coordinate nelle direzioni omogenee del flusso, x e z , è arbitraria.

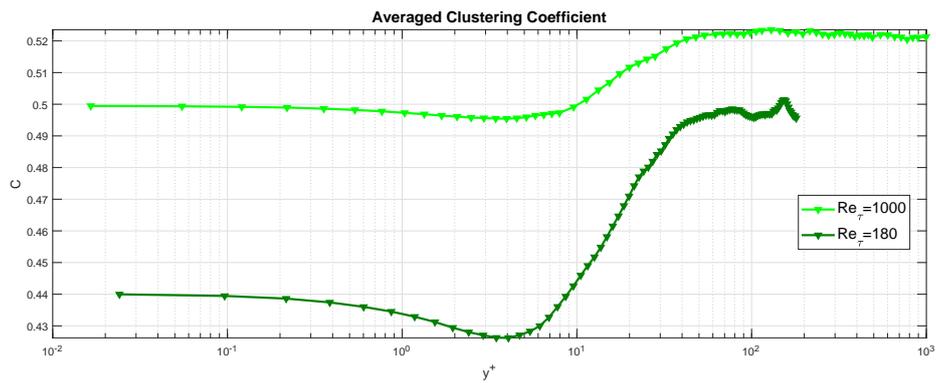


Figura 3.9: Confronto tra i coefficienti di clustering globale \tilde{C} .

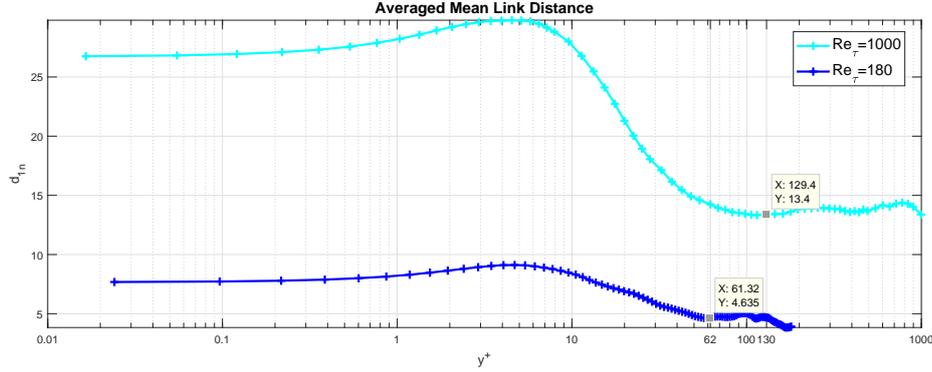
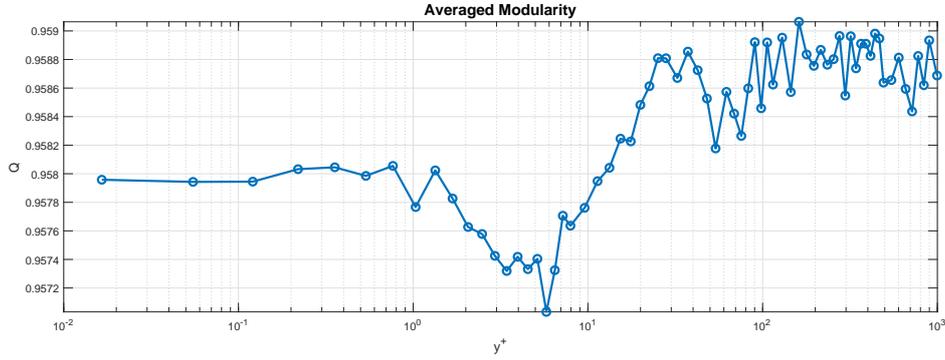
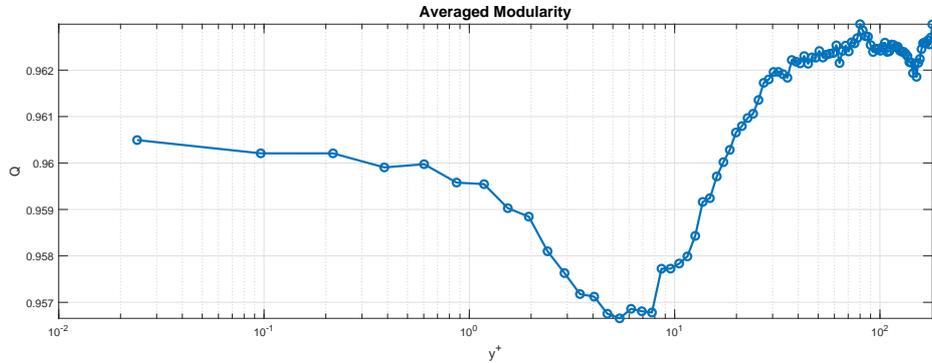


Figura 3.10: Confronto tra le mean link-length \widetilde{d}_{1n} .

ci si aspetta che, con questa combinazione di metriche, ci siano (in media) un intervallo temporale leggermente maggiore tra un picco e un altro e una minor presenza di fluttuazioni, cioè si abbia una serie più morbida. Il fatto che \widetilde{k} segua così bene l'andamento di \widetilde{C} e \widetilde{Tr} suggerisce che la riduzione delle irregolarità ha un effetto molto più importante sulla visibilità globale rispetto alla diminuzione della frequenza dei picchi. Guardando le due serie estratte a $y^+ = 3,96$ (per $Re_{\tau} = 1000$) e $y^+ = 4,06$ (per $Re_{\tau} = 180$) e confrontandole con le due serie considerate precedentemente, queste ipotesi sembrano verificate.

Avvicinandosi ancor di più al centro del canale, \widetilde{C} e \widetilde{k} crescono considerevolmente mentre \widetilde{d}_{1n} diminuisce ampiamente. La diminuzione di \widetilde{d}_{1n} implica un aumento sia di irregolarità sia della frequenza di eventi estremi, mentre la crescita di \widetilde{C} comporta un incremento sostanziale delle fluttuazioni. Un maggior valore di \widetilde{k} è indice di maggiore visibilità (la visibilità locale è aumentata dalle irregolarità) e contemporaneamente di una maggior ricorrenza di eventi estremi, poiché i nodi più connessi sono quelli associati ai dati con i valori più grandi, cioè i picchi. Quindi ci si aspetta che una serie estratta al centro del canale sia, in media, meno regolare e presenti una maggior ricorrenza di picchi rispetto a quelle estratte più vicino alla parete. Questo comportamento può essere chiaramente notato guardando le due serie a $y^+ = 996,3$ (per $Re_{\tau} = 1000$) e $y^+ = 177,1$ (per $Re_{\tau} = 180$) ed è confermato anche dalla modularity, \widetilde{Q} . Gli andamenti di questa metrica per i due Re_{τ} sono riportati in Figura 3.11: nonostante le variazioni siano dell'ordine di qualche millesimo, si nota un trend generale che è molto simile a quello delle altre metriche considerate finora. Questo trend conferma una maggior presenza di picchi dove il valore di modularity cresce, cioè oltre $y^+ \approx 4$ e avanzando verso il centro del canale. Si ricorda che più alta è \widetilde{Q} , maggiore è il numero di community in cui la rete è divisa.

E' interessante notare che, in entrambi i casi, nella zona vicina al centro del canale, le metriche citate cambiano molto poco. Tuttavia, per i due Re_{τ}

(a) $Re_\tau = 1000$.(b) $Re_\tau = 180$.**Figura 3.11:** Modularity \tilde{Q} in funzione della distanza y^+ .

considerati, l'intervallo in cui esse rimangono circa costanti è diverso: a $Re_\tau = 1000$ inizia a $y^+ \approx 130$, mentre a $Re_\tau = 180$ inizia a $y^+ \approx 62$. Ciò è evidente nelle Figure 3.10 e 3.9.

In sintesi, è davvero possibile predire la struttura temporale delle serie attraverso l'analisi delle metriche delle reti complesse ma è importante osservare che il comportamento di una singola metrica non è un'informazione sufficiente: è necessaria una loro combinazione per determinare come due serie differiscano in termini di picchi ed irregolarità. Inoltre, non ci si riferisce mai ad uno specifico valore assunto dalle metriche ma l'analisi è comparativa poiché si concentra sempre sui loro andamenti in funzione della distanza dalla parete. Nelle Figure 3.12 e 3.13 sono riportate le reti estratte dalle serie temporali considerate finora. A causa dei pochi lati prodotti dall'algoritmo di visibilità orizzontale, è difficile in questo caso ottenere informazioni sulla struttura temporale dalla rappresentazione diretta di una rete, a differenza di ciò che accade analizzando le metriche mediate nelle direzioni di omogeneità del flusso. Il piccolo numero

di connessioni è segnalato dal basso valore di \tilde{k} per entrambi gli Re_τ .

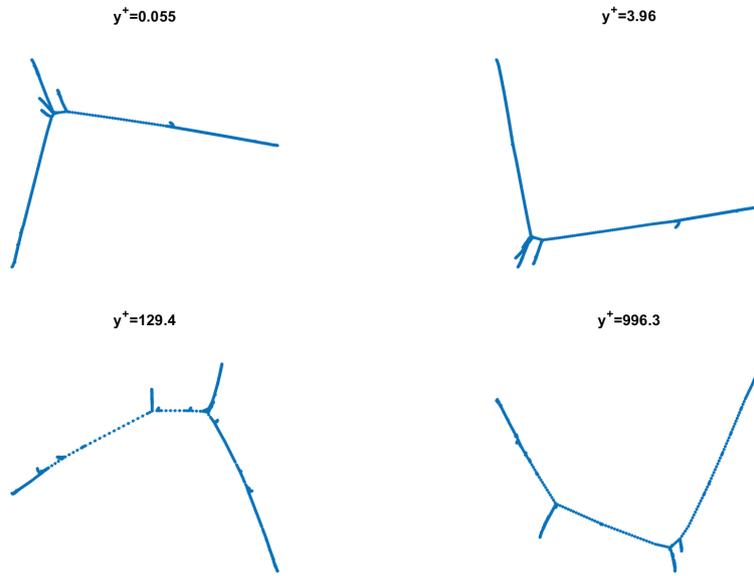


Figura 3.12: Reti estratte dalle serie di Figura 3.7.

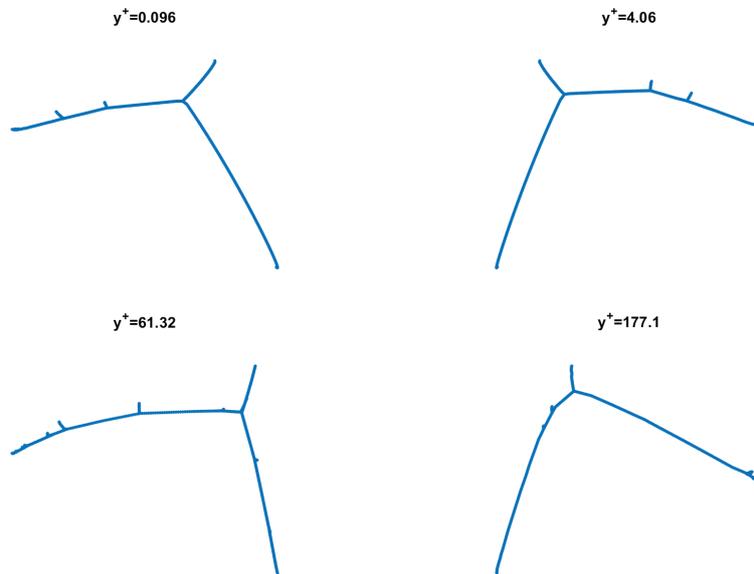


Figura 3.13: Reti estratte dalle serie di Figura 3.8.

Infine, sono state calcolate anche le distribuzioni cumulative del grado, \tilde{P}_k ,

del coefficiente di clustering, \widetilde{P}_C , e della mean link-length, $\widetilde{P}_{d_{1n}}$, definite rispettivamente nelle Equazioni 2.3, 2.7 e 2.10, e mostrate nelle Figure 3.14, 3.15 e 3.16 per le stesse coordinate y^+ considerate in precedenza. Come per le altre metriche, le distribuzioni cumulative sono state calcolate per ogni rete e poi mediate sulle direzioni di omogeneità della corrente.

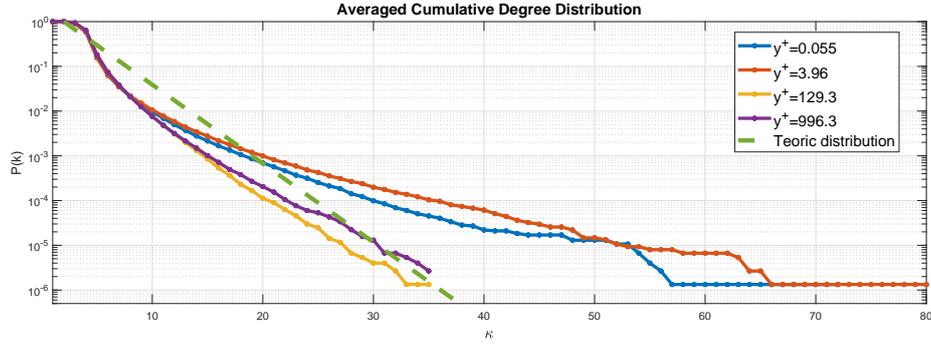
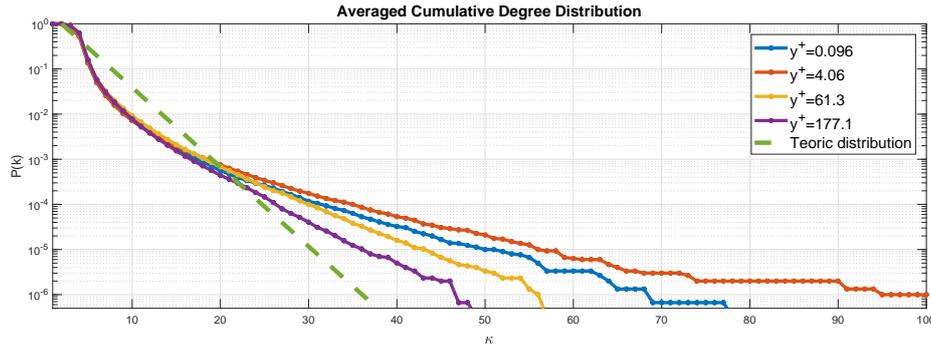
(a) $Re_\tau = 1000$.(b) $Re_\tau = 180$.

Figura 3.14: Distribuzioni cumulative del grado, \widetilde{P}_k , riportate in un diagramma semi-logaritmico per i due Re_τ . La linea verde tratteggiata rappresenta l'andamento teorico per una serie temporale caotica.

La P_k di reti di questo tipo può essere pensata come una misura delle dipendenze temporali, lineari e non lineari, che caratterizzano in maniera notevole le serie temporali turbolente. Queste dipendenze temporali distinguono una serie turbolenta rispetto ad una caotica. Come è evidente in Figura 3.14, le code delle distribuzioni alle varie y^+ rivelano un andamento decrescente esponenzialmente: cioè i nodi con grado elevato sono statisticamente molto poco frequenti. In particolare, le linee sono più ripide dove le irregolarità e i picchi sono più ricorrenti, ovvero muovendosi dal termine del sottostrato viscoso verso il centro del canale, $y = h$, zona in cui il grado massimo si riduce notevolmente (ciò giustifica ulteriormente l'uso di \tilde{C} per quantificare la frequenza di irregolarità). Tuttavia,

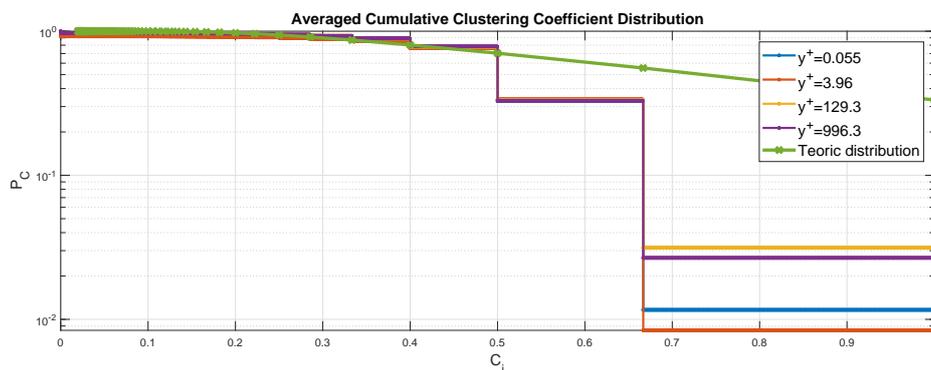
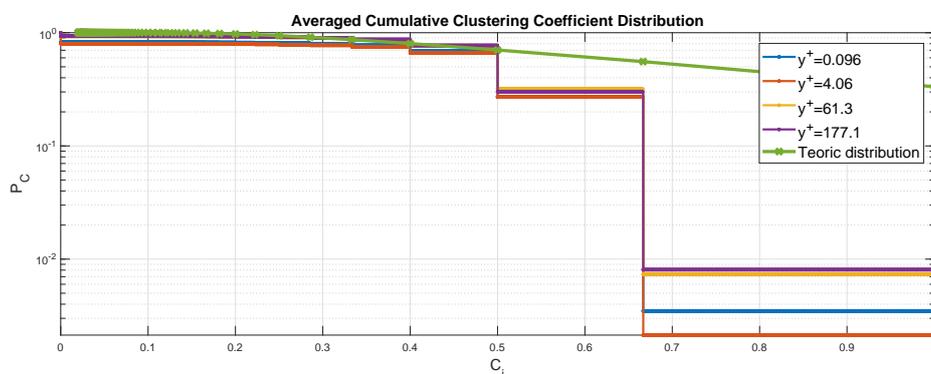
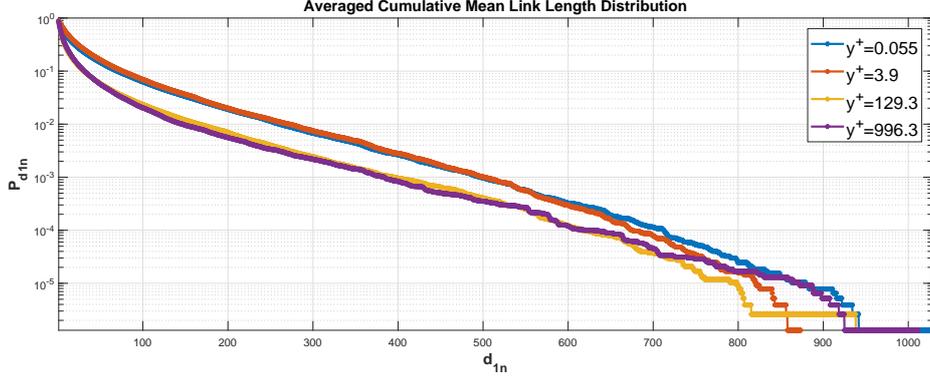
(a) $Re_\tau = 1000$ (b) $Re_\tau = 180$

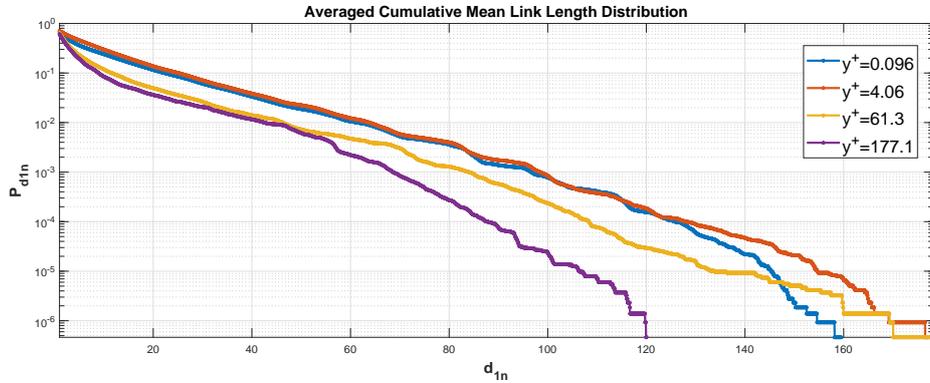
Figura 3.15: Distribuzioni cumulative del coefficiente di clustering, \widetilde{P}_C , riportate in un diagramma semi-logaritmico per i due Re_τ . La linea verde rappresenta l'andamento teorico per una serie temporale caotica; le x sulla curva indicano i valori possibili di C_i .

le linee delle \widetilde{P}_k si discostano molto dalla P_k di serie caotiche, calcolata tramite somma infinita dei valori della distribuzione p_k descritta dall'Equazione 2.12, specialmente quando si è più vicini alla parete. Si capisce così l'importanza delle correlazioni temporali, lineari e non, nei flussi turbolenti. Ciò conferma i risultati di Iacobello, Scarsoglio e Ridolfi [1].

La caratteristica principale delle \widetilde{P}_C di Figura 3.15 consiste nel fatto che, muovendosi verso il centro del canale, si ha una maggiore probabilità di trovare valori di \widetilde{C}_i prossimi a 1. Questo fatto è consistente con quanto detto finora: infatti, \widetilde{C} , che rappresenta proprio la media delle \widetilde{C}_i , cresce all'aumentare di y^+ per entrambi gli Re_τ e con essa cresce anche la frequenza di irregolarità. Il suo andamento è a gradini perché è possibile avere solamente certi numeri



(a) $Re_\tau = 1000$



(b) $Re_\tau = 180$

Figura 3.16: Distribuzioni cumulative di d_{1n} , $\widetilde{P}_{d_{1n}}$, riportate in un diagramma semi-logaritmico per i due Re_τ .

discreti di triangoli in ognuno dei nodi e di conseguenza solo alcuni valori discreti di C_i , come descritto nel paragrafo 2.3. Si nota inoltre che, generalmente a tutte le distanze y^+ , valori alti del coefficiente di clustering, e in particolare $C_i = 1$, sono molto meno frequenti che nella previsione teorica (somma infinita dei risultati di p_{C_i} dell'Equazione 2.13). Questo costituisce una ulteriore prova a sostegno di quanto affermato in precedenza per la \widetilde{P}_k a proposito delle correlazioni temporali.

3.2.3 Ulteriori considerazioni

Si vogliono infine ulteriormente legare le osservazioni dei due precedenti paragrafi per fare considerazioni aggiuntive sulle regioni del flusso turbolento del canale. Come precedentemente concluso, $y^+ \approx 4$ rappresenta il limite superiore del sottostato viscoso. Oltre $y^+ \approx 4$, ci si addentra nel *buffer layer* ($5 < y^+ < 30$),

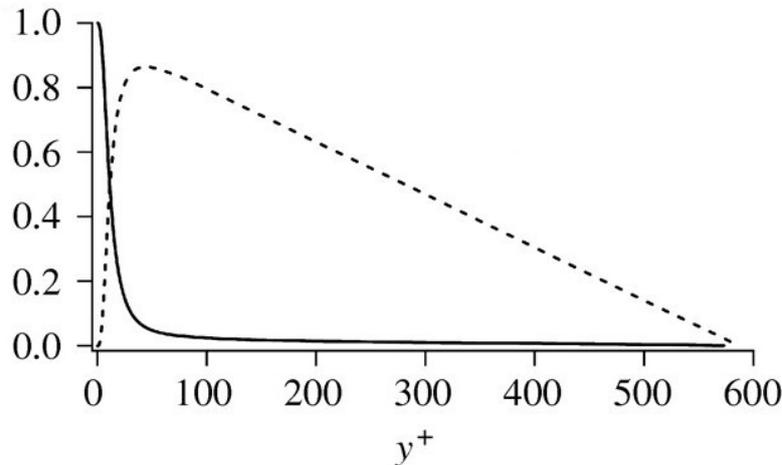


Figura 3.17: Andamento degli sforzi turbolenti (linea tratteggiata) e viscosi (linea continua) in un canale piano.

Regione	Limiti
Sottostrato viscoso	$y^+ \ll 10$
Buffer Layer	$5 < y^+ < 30$
Inner Layer	$30 < y^+ < 0.1h$
External Layer	$y^+ > 0.1h$

Tabella 3.2: Regioni di un flusso turbolento vicino ad una parete.

una regione intermedia dove gli sforzi viscosi iniziano a diminuire mentre quelli turbolenti cominciano a crescere. Tuttavia, proprio all’inizio di questa regione ($y^+ \approx 4$), i processi turbolenti sono ancora poco influenti, risultando in una diminuzione delle irregolarità su un segnale che è ancora caratterizzato da variazioni temporali lente, cioè da una bassa ricorrenza di picchi. Il fatto che le serie temporali, a questa distanza dalla parete, abbiano il minimo numero di picchi e irregolarità è quindi del tutto coerente con la teoria. Al di là del buffer layer, si entra nell’inner layer e il fluido si organizza in strutture vorticosi di grandezza via via crescente. Infine, l’ultima regione che non è stata ancora definita è l’*external layer* (regione esterna), che inizia oltre i secondi punti estremanti delle metriche e cioè per $y^+ \geq 130$ a $Re_\tau = 1000$ e per $y^+ \geq 60$ a $Re_\tau = 180$, ovvero si trova oltre la regione interna. In questa zona il flusso diviene poco soggetto agli effetti di parete e si ha l’origine di strutture vorticosi più grandi. Però, la coesistenza di più scale e la struttura più complicata non paiono implicare una chiara modifica degli andamenti delle metriche, che sembrano invece essere

abbastanza piatti.

Per sintetizzare, le varie regioni di un flusso turbolento e l'andamento degli sforzi turbolenti e viscosi con la distanza y^+ in un canale piano sono riportati rispettivamente in Tabella 3.2 e in Figura 3.17.

Conclusioni

IN questo lavoro, si è studiata l'applicazione dell'algoritmo di visibilità orizzontale alle serie temporali di una corrente turbolenta completamente sviluppata nel canale piano in due configurazioni differenti per il parametro Re_τ . Si è deciso di focalizzare l'attenzione sulla componente della velocità parallela alla direzione del flusso, u , perché essa è la quantità più intuitiva per caratterizzare una corrente fluida. Prima di tutto si è cercato di capire come le metriche delle reti differiscano tra loro in base alle diverse strutture temporali delle serie mappate. Gli andamenti delle varie metriche considerate sono risultati essere un buon modo per evidenziare le proprietà temporali delle serie, in particolare i picchi e le irregolarità, nella direzione normale alla parete y^+ , e per distinguere le caratteristiche comuni e le differenze nella corrente nel canale a seconda del valore di Re_τ . Inoltre, si sono riusciti ad associare abbastanza bene i vari trend delle metriche alla fluidodinamica del fenomeno, in particolare mettendo in evidenza l'esistenza del *sottostrato viscoso* e di altre regioni del flusso per entrambe le configurazioni analizzate; cioè l'analisi delle serie ha fornito risultati coerenti con i modelli teorici utilizzati solitamente per affrontare i problemi legati alla turbolenza.

Nonostante nella letteratura siano proposte molte tecniche statistiche per studiare serie temporali non lineari, come per esempio l'applicazione delle *RANS* (Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations), molte di loro non colgono le differenti strutture temporali delle serie di una grandezza fisica associata al moto turbolento. L'algoritmo di visibilità orizzontale, invece, ha dimostrato di essere un potente e semplice strumento da utilizzare per trattare una grande quantità di dati e sottolineare specifiche caratteristiche di queste serie. Infatti, grazie alle proprietà di questo algoritmo, ogni rete è costruita estraendo dalla corrispettiva serie tutte le informazioni riguardo la dislocazione dei picchi e delle fluttuazioni. Ciò non è possibile utilizzando i più comuni strumenti statistici.

Rispetto all'algoritmo di visibilità naturale utilizzato in Iacobello, Scarsoglio e Ridolfi [1], l'algoritmo di visibilità orizzontale richiede tempi di calcolo inferiori e perciò può essere utilizzato per un'analisi preliminare di un campo di

moto più rapida. Tuttavia, si è notato che, soprattutto gli andamenti di \tilde{k} e \widetilde{Tr} , si discostano molto se si applicano i due diversi criteri di visibilità, a causa delle loro differenti proprietà statistiche. Perciò, volendo studiare in modo approfondito un fenomeno turbolento, si suggerisce di integrare i risultati ottenuti dall'applicazione di entrambi i metodi.

L'unico svantaggio degli algoritmi di visibilità consiste nell'impossibilità di rilevare l'ampiezza delle serie temporali e quindi i differenti ordini di grandezza delle quantità analizzate a seconda della posizione, a causa della proprietà di invarianza per trasformazioni affini e della conseguente irreversibilità (non si può riottenere la serie temporale iniziale partendo dalla rete ad essa associata, poiché il criterio di visibilità non cambia se si scalano gli assi). Questo problema potrebbe essere aggirabile attraverso l'uso di reti *orientate e/o pesate*.

In ogni caso, la procedura proposta può fornire un promettente supporto ai metodi classici per l'analisi di altri tipi di corrente turbolenta in altre configurazioni, agendo in particolare in modo predittivo quando le misurazioni sperimentali sono più difficoltose. Ad esempio, data una serie temporale e i comportamenti delle metriche della rete ad essa associata come funzioni della distanza dalla parete o dal centro del canale, potrebbe essere possibile dedurre qualitativamente il comportamento di un'altra serie in una posizione diversa rispetto alla parete. Quindi, potrebbe essere possibile sviluppare un metodo sistematico per operare una caratterizzazione preliminare delle regioni in un flusso turbolento ed ottenere così una comprensione generale del sistema fisico mediante una rapida analisi.

Appendice A

Codici

A.1 Implementazione dell'algoritmo di visibilità orizzontale

DI seguito si riporta il codice Matlab della funzione `HORIZ_VISIB.M` che, partendo dalla serie temporale di t valori memorizzata nel vettore ts , genera la lista di adiacenza G relativa all'algoritmo di visibilità orizzontale sotto forma di cell array.

Codice A.1: `HORIZ_VISIB.M`

```
1 function G = horiz_visib(ts,left,right,G,t)
2
3 % Horizontal visibility algorithm fast
4 %   ts=time series
5 %   left= first data index
6 %   right= last data index
7 %   G=adjacency list (cell array)
8 %   t=time samples
9
10 if left<right
11     [~,k]=max(ts(left:right));
12     k=k+left-1;
13
14     beta=-Inf;
15     for i=k-1:-1:left
16         alfa=ts(i);
17         if alfa>beta
18             G{k}=[G{k};i];
19             beta=alfa;
```

```

20     end
21 end
22 beta=-Inf;
23 for i=k+1:right
24     alfa=ts(i);
25     if alfa>beta
26         G{k}=[G{k};i];
27         beta=alfa;
28     end
29 end
30 G=horiz_visib(ts,left,k-1,G,t);
31 G=horiz_visib(ts,k+1,right,G,t);
32 end
33
34 return;
35 end

```

La lista G può poi venire passata come argomento della seguente funzione `ADJ_LIST2ADJ_MTRX.M` per ottenere la matrice A_output che, sommata alla sua trasposta, fornisce la matrice di adiacenza associata alla serie temporale ts .

Codice A.2: `ADJ_LIST2ADJ_MTRX.M`

```

1 function [A_output] = adj_list2adj_mtrx(A_input)
2 %from adjacency matrix to adjacency list and viceversa
3 % A_input=square matrix or cell array list
4
5 A_output=[];
6 if iscell(A_input)
7     Nn=length(A_input);
8
9     for i=1:Nn %controllo se la matrice e pesata; se lo e, creo
10         Pesi_input
11             if size(A_input,1)==2 && size(A_input,2)>1
12                 weigh=1;
13                 Pesi_input=cell(Nn,1);
14                 for i=1:Nn
15                     if isempty(A_input{1,i})==0
16                         Pesi_input{i}=A_input{2,i};
17                     end
18                 end
19                 A_input=A_input(1,:);
20             elseif size(A_input,2)==2 && size(A_input,1)>1
21                 weigh=2;

```

```

21         Pesì_input=cell(Nn,1);
22         for i=1:Nn
23             if isempty(A_input{i,1})==0
24                 Pesì_input{i}=A_input{i,2};
25             end
26         end
27         A_input=A_input(:,1);
28     else
29         weigh=0;
30     end
31     break;
32 end
33
34 A_provv=cell(Nn,1);
35 for i=1:Nn
36     A_provv{i}=ones(length(A_input{i}),1)*i;
37 end
38 source=vertcat(A_input{:});
39 target=vertcat(A_provv{:});
40 if weigh>0
41     Pesì_input=vertcat(Pesì_input{:});
42 else
43     Pesì_input=ones(size(target));
44 end
45 if ~isa(source,'double')
46     source=double(source); %perche la funzione "sparse" richiede dei
47     double
48 end
49 A_output=sparse(source,target,Pesì_input,Nn,Nn);
50 elseif size(A_input,1)==size(A_input,2) %non cella
51     if istriu(A_input) || istril(A_input) % se matrice triangolare
52         qstion=questdlg('La matrice non e simmetrica. Proseguire?','','
53             Si','No','No');
54         if strcmp(qstion,'No')
55             return;
56         end
57     end
58     if isequal(size(unique(A_input(find(A_input~=0,100)))),[1,1])
59         weigh=0;
60     else
61         weigh=1;
62     end

```

```
63     Nn=length(A_input);
64
65     if Nn>(2^32)-1
66         cast_type=64;
67     else
68         cast_type=[8,16,32,64];
69         cast_type=cast_type(find(log2(Nn+1)<=cast_type,1));
70     end
71
72     A_output=cell(Nn,1);
73     if weigh==1
74         for i=1:Nn
75             tmp=find(A_input(:,i));
76             A_output(i,1:2)=[cast(tmp, strcat('uint', num2str(cast_type))
77                             ), [full(A_input(tmp,i))]]; %cambio la classe sapendo
78                             essere intero
79         end
80     else
81         for i=1:Nn
82             tmp=find(A_input(:,i));
83             tmp=cast(tmp, strcat('uint', num2str(cast_type))); %cambio la
84                             classe sapendo essere intero
85             A_output{i}=tmp;
86         end
87     end
88     disp('Error input')
89     return;
90 end
```

A.2 Calcolo delle metriche

Si riportano ora le funzioni scritte in Matlab o R utilizzate per il calcolo delle metriche.

Degree distribution

Codice A.3: DEGREE_DISTRIBUTION.M

```
1 function [p,P]=degree_distribution(k,Nn)
2
3 %DEGREE DISTRIBUTION p
4
5 p=zeros(1,130);
6
7 for i=1:Nn
8     p(k(i))=p(k(i))+1;
9 end
10
11 p=p/Nn;
12
13 %CUMULATIVE DEGREE DISTRIBUTION
14
15 P=zeros(1,130);
16 t=0;
17 for i=max(k):-1:1
18     t=t+p(i);
19     P(i)=t;
20 end
```

Transitivity

Codice A.4: TRANSITIVITY.M

```
1 function [Tr,triangols,triple]=transitivity2(cell_B,B,Nn)
2 %TRANSITIVITY
3
4 %calcolo CONNECTED TRIPLE e TRIANGOLI
5 triple=0;
6 triangols=0;
7 for i=1:Nn
8     triple=triple+length(cell_B{i})*(length(cell_B{i})-1)/2;    %
9     r=1;
10     %combinazioni
```

```

10     if iscolumn(cell_B{i})
11         [cell_B{i}]=[cell_B{i}'];
12     end
13     for j=[cell_B{i}(1:end-1)]
14         r=r+1; %r serve a evitare che i
                triangoli vengano contati 2 volte per ogni ciclo interno, e
                quindi 6 in totale
15         for k=[cell_B{i}(r:end)]
16             if j>0 && k>0 && B(j,k)==1 %j e k >0 per evitare errori
17                 triangols=triangols+1;
18             end
19         end
20     end
21 end
22 Tr=triangols/triple;
23 %non divido per 3 perche i triangoli vengono gia contati ognuno 3 volte
    nel
24 %ciclo precedente

```

Coefficiente di clustering

Codice A.5: CLUSTERING_COEFF.M

```

1 function [C,p,P]=clustering_coeff(cell_B,B,Nn)
2
3 %CLUSTERING COEFFICIENT
4
5 c=zeros(Nn,1);
6
7 for i=1:Nn
8     e_i=0;
9     k_i=length(cell_B{i}); %calcolo della degree centrality del nodo i
10    r=1;
11    if iscolumn(cell_B{i})
12        [cell_B{i}]=[cell_B{i}'];
13    end
14    for j=[cell_B{i}(1:end-1)]
15        r=r+1;
16        for m=[cell_B{i}(r:end)] %per ridurre il numero di
                calcoli scansiono solo il numero di triangoli associati al
                nodo i, invece di tutti i collegamenti tra i nodi j e m
17            if j>0 && m>0 && B(j,m)==1 %j e m >0 per evitare errori
18                e_i=e_i+1;
19            end

```

```

20     end
21 end
22 if k_i>1
23     c(i)=2*e_i/(k_i*(k_i-1));
24 end
25 end
26 C=sum(c)/Nn;
27
28 %CLUSTERING COEFFICIENT DISTRIBUTION
29
30 p=zeros(1,10^4+1);
31 c=round(c.*10^4); % i valori della distribuzione sono
    approssimati alla quarta cifra dopo la virgola
32 for i=1:Nn
33     p(c(i)+1)=p(c(i)+1)+1;
34 end
35
36 %CUMULATIVE CLUSTERING COEFFICIENT DISTRIBUTION
37
38 P=zeros(1,10^4+1);
39 t=0;
40 for i=(max(c)+1):-1:1
41     t=t+p(i);
42     P(i)=t;
43 end

```

Mean link-length

Codice A.6: MEAN_LINK_LENGTH.M

```

1 function [d_ln,p,P]=mean_link_length(cell_B,B,Nn)
2
3 %MEAN LINK LENGTH
4
5 d_ln_local=zeros(Nn,1);
6 k_i=sum(B);
7
8 for i=1:Nn
9     if iscolumn(cell_B{i})
10        [cell_B{i}]=[cell_B{i}'];
11     end
12     for j=[cell_B{i}]
13         if i>=j
14             t=i-j;

```

```
15     else
16         t=j-i;
17     end
18     d_1n_local(i)=d_1n_local(i)+t;
19 end
20 d_1n_local(i)=d_1n_local(i)/k_i(i);
21 end
22 d_1n=sum(d_1n_local)/Nn;
23
24 %MEAN LINK LENGTH DISTRIBUTION
25
26 p=zeros(1,10^4+1);
27 d_1n_local=round(d_1n_local);    % i valori della distribuzione sono
    approssimati alle unita'
28 for i=1:Nn
29     p(d_1n_local(i)+1)=p(d_1n_local(i)+1)+1;
30 end
31
32 %CUMULATIVE MEAN LINK LENGTH DISTRIBUTION
33
34 P=zeros(1,10^4+1);
35 t=0;
36 for i=(max(d_1n_local)+1):-1:1
37     t=t+p(i);
38     P(i)=t;
39 end
```

Modularity

La modularity è stata invece calcolata con uno script in linguaggio R, tramite la funzione `FASTGREEDY.COMMUNITY` compresa nel pacchetto *igraph*¹. Questa funzione tenta di dividere la rete in community attraverso l'ottimizzazione del valore della modularity stessa. Per utilizzarla è stato prima necessario esportare le reti da Matlab in formato *pajek*.

Codice A.7: MODULARITY_150.R

```
1 filename=sprintf("C:\\Users\\mikel\\Desktop\\Prova Finale
    \\5-Modularity+Re_150\\Results\\Re_tau_%d\\z_%d\\Networks
    \\x%d_y%d.net",Re,z,i,j)
2 g<-read.graph(filename,format="pajek")
3 fc<-fastgreedy.community(g,modularity=TRUE)
```

¹http://igraph.org/r/doc/cluster_fast_greedy.html

```
4 mod=sprintf("%.16f\t",modularity(fc))
5 cat(mod , file = fileout, sep = ",", fill = FALSE, labels =
  NULL, append = TRUE)
```


Riferimenti bibliografici

- [1] G. Iacobello, S. Scarsoglio e L. Ridolfi. «Visibility graph analysis of wall turbulence time-series». In: *Physics Letters A* **382** (2018), pp. 1–11.
- [2] R. Arina. *Fondamenti di Aerodinamica*. A cura di Levrotto & Bella. 2015.
- [3] J. Graham et al. «A Web services accessible database of turbulent channel flow and its use for testing a new integral wall model for LES». In: *Journal of Turbulence* **17.2** (2016), pp. 181–215.
- [4] *Johns Hopkins Turbulence Databases*. URL: http://turbulence.pha.jhu.edu/Channel_Flow.aspx.
- [5] S. Boccaletti et al. «Complex networks: Structure and dynamics». In: *Physical Reports* **424** (2006), pp. 175–308.
- [6] S. Scarsoglio, G. Iacobello e L. Ridolfi. «Complex Networks Unveiling Spatial Patterns in Turbulence». In: *International Journal of Bifurcation and Chaos* **26**. 13 (2016).
- [7] B. Luque et al. «Horizontal visibility graphs: Exact results for random time series». In: *Physical Review E* **80**. 046103 (2009).
- [8] L. Lacasa et al. «From time series to complex networks: The visibility graph». In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* **105**. 13 (2008), pp. 4972–4975.
- [9] R. V. Donner et al. «Recurrence-based time series analysis by means of complex network methods». In: *International Journal of Bifurcation and Chaos* **21**. 4 (2011), pp. 1019–1046.
- [10] A. W. Vreman e J. G. M. Kuerten. «Comparison of direct numerical simulation databases of turbulent channel flow at $Re_\tau = 180$ ». In: *Physics of Fluids* **26**. 015102 (2014).

